Logarithmen

Die Gleichung vom Typ $b^x = a$ wird mit Hilfe des Logarithmus gelöst. Der **Logarithmus von a zur Basis b** ist die Zahl, mit der b potenziert werden muss, damit man a erhält. Es ist also

▶▶▶ $$x = \log_b a\,.$$

Logarithmen zu speziellen und häufig gebrauchten Basen haben eigene Namen:

Der Logarithmus zur Basis 10 heißt dekadischer oder Zehnerlogarithmus:

▶▶▶ $$\log_{10} a = \lg a\,.$$

Der Logarithmus zur Basis e =2,7182 heißt natürlicher Logarithmus:

▶▶▶ $$\log_e a = \ln a\,.$$

Auf Ihrem Taschenrechner finden Sie den Zehnerlogarithmus meistens als LOG, den natürlichen Logarithmus als LN.

Der Logarithmus ist unabhängig von der Wahl der Basis nur für positive Werte definiert!

Spezialfälle

Der Logarithmus von 1 ist immer 0 – unabhängig von der Basis:

▶▶▶ $$\log_b 1 = 0\,.$$

Allgemeiner ist

▶▶▶ $$\log_b a \begin{cases} <0 & \text{für} \quad a<1 \\ 0 & \text{für} \quad a=1\,. \\ >0 & \text{für} \quad a>1 \end{cases}$$

Weiterhin ist immer

▶▶▶ $$\log_b b = 1\,.$$

Rechenregeln für Logarithmen

Die Gleichungen gelten für beliebige, aber identische Basen

▶▶▶ $\log a + \log b = \log(a \cdot b)$.

▶▶▶ $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.

▶▶▶ $\log a^b = b \cdot \log a$.

Weitere Regeln gibt es nicht! Also auf keinen Fall Regeln erfinden für $\log(a \pm b)$ ...!

Logarithmen zu beliebiger Basis berechnen

Wie berechnen Sie beispielsweise $\log_2 5$? Ihr Taschenrechner kennt ja unter Umständen nur den natürlichen und den Zehnerlogarithmus.

$\log_2 5$ ist die Lösung der Gleichung

$$2^x = 5 .$$

Nun logarithmiert man beide Seiten der Gleichung mit dem Logarithmus, den man zur Verfügung hat, also beispielsweise mit dem Zehnerlogarithmus lg. Dann ist

$$\lg(2^x) = x \cdot \lg 2 = \lg 5$$

und somit

$$x = \log_2 5 = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{0{,}69897}{0{,}30103} = \underline{\underline{2{,}322}} .$$

Die Probe liefert $2^{2{,}322} = 5$. So einfach ist das. Allgemein gilt

▶▶▶ $\log_b a = \frac{\log_B a}{\log_B b}$.

Aufgabe 1: Schreiben Sie als *einen* Logarithmus

a) $\lg(x) + \lg(2y)$ b) $\log_a(u^2) - \log_a(u)$ c) $\lg(ab) - \lg(a^2 b)$

d) $\log_a(ab) - \log_a(a^2 b)$ e) $\frac{2}{3}\log_a(z)$ f) $\log_a \frac{1}{x} - \log_a \frac{2}{x}$

g) $2 \cdot \lg\frac{1}{a} + \lg(a^2)$ h) $\log_a(x) - \log_a\sqrt{x}$

i) $2 \cdot \lg(x) + 3 \cdot \lg(y) - \lg(z)$ j) $\log_a(p) - \frac{1}{2}\log_a(q) + \frac{1}{4}\log_a(r)$

k) $3 \cdot \lg(a) + \frac{1}{2}\lg(a+x)$ l) $\frac{1}{4}\log_a(a+b) - \frac{1}{3}\log_a(a-b)$

m) $\log_a(2u) - 2 \cdot \log_a(u) + \log_a(u^2) + \log_a\frac{1}{u}$ n) $\lg\sqrt{x} - \lg\sqrt{4x} + \lg\frac{1}{2}x^2 + \lg(4)$

Aufgabe 2: Lösen Sie die Gleichung ohne Taschenrechner

a) $\log_a(x) = 2 \cdot \log_a(3)$ b) $\lg(x) = \lg(6) - \lg(3)$

c) $\lg(x) = 2 \cdot \lg(5) + 3 \cdot \lg(2)$ d) $3 \cdot \log_a(x) = 27$

e) $2 \cdot \lg(x) = \lg(16) + \lg(9)$ f) $\log_a(b \cdot x) = 1 + \log_a(5)$

Aufgabe 3: Lösen Sie nach x auf. u und v stehen für reelle Zahlen mit u>v>0.

a) $\log_a(x) = 2 \cdot \log_a(u) + \frac{1}{2}\log_a(v)$ b) $\log_a(x) = \log_a(u+v) - \log_a(u-v)$

c) $3 \cdot \log_a(x) = 4 \cdot \log_a(u) - 2 \cdot \log_a(v)$ d) $2 \cdot \log_a(x) + 3 \cdot \log_a(u^2+v^2) = 0$

Aufgabe 4: Schreiben Sie als Summe oder Produkt mit „einfachen“ Logarithmen.

a) $\lg(3x)$ b) $\log_a(abc)$ c) $\lg(u^2)$ d) $\log_a(z^3)$

e) $\log_a(2ab^2)$ f) $\log_a\left(\frac{5e}{f}\right)$ g) $\log_a\left(\frac{uv}{w}\right)$ h) $\lg\left(\sqrt{x}\right)$

i) $\log_a\left(1:\sqrt{x}\right)$ j) $\log_a\left(\sqrt[4]{b}\right)$ k) $\log_a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b^2}}\right)$ l) $\log_a\left(\frac{u^3}{\sqrt{v}}\right)$

m) $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{v^2}\right)$ n) $\log_a\left[\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]$ o) $\lg\left(\sqrt[4]{\frac{x^3}{y}}\right)$ p) $\log_a\left(\frac{x^2y^3}{u^2v^3}\right)$

q) $\log_a\left(\frac{1}{a^2b^4c^7}\right)$ r) $\log_a\left(\frac{r^2st^4}{u^3v}\right)$ s) $\log_a\left(\sqrt{a^{11}b^3c^5}\right)$ t) $\lg\left(\sqrt{x^5yz^9}\right)$

u) $\log_a\left(a^2 - b^2\right)$ v) $\log_a\left(\frac{1}{1-x}\right)$ w) $\log_a\left(x\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

Aufgabe 5: Lösen Sie durch „Vergleich der Exponenten".

a) $5^{2x-3} = 5$ b) $6^{4x-5} = 216$ c) $4^{2x-1} = 64$ d) $3^{2x+1} = 3^{x+2}$

e) $3^x = \frac{1}{81}$ f) $25^{x+1} = \frac{1}{5}$ g) $7^{x-2} = \sqrt{7}$ h) $3^{5x} = \sqrt[3]{3^2}$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie x.

a) $10^{x-1} = 6$ b) $6^{x+1} = 108$ c) $5^{1-2x} = 17$ d) $10^{5x+1} = 2$

e) $3 \cdot 8^{-x-2} = 25$ f) $(7^{2x-1})^2 = 36$ g) $5 \cdot 2^{-3x+4} = 1$ h) $3 \cdot 4^{5-x} = 1$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $4^x = 2$ b) $4^x = -2$ c) $4^{x^2} = 2$ d) $2^{x^2} = 4$

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

a) $2^x = 3^{x-1}$ b) $7^{x+1} = 2^{7x}$ c) $5^{2y} = 4^{1-y}$ d) $4^{2z+1} = 10^{3z}$

e) $3 \cdot 1{,}4^{3t} = 2^{t-1}$ f) $4 \cdot 5^{x-1} = 10^{x+1}$ g) $7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3}$ h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x-3}$

Aufgabe 9: Schreiben Sie als Exponentialgleichung und lösen Sie dann.

a) $\sqrt[3]{5^{7-x}} = 5^{x-2}$ b) $\sqrt[5]{2^x} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}$ c) $\sqrt[4]{3^{2x+5}} = \sqrt{27^x}$

d) $\sqrt{2^{3x}} \cdot \sqrt[3]{5^{2x}} = 1$

Aufgabe 10: Lösen Sie durch geeignete Substitution wie im Beispiel

Beispiel: $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$. Mit $3^{2x} = (3^x)^2$ folgt zunächst $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ und mit $z = 3^x$ die quadratische Gleichung $z^2 - 4 \cdot z + 3 = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $z_1 = 1$ und $z_2 = 3$. Dann bleibt also noch, die beiden Gleichungen $z_1 = 3^{x_1}$ und $z_2 = 3^{x_2}$ zu lösen ...

a) $7^x + 4 = 21 \cdot 7^{-x}$ b) $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$ c) $16^x - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

d) $9^x + 3^x = 6$ e) $9 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^{-x} + 3 = 0$ f) $5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^{-x} - 126 = 0$

g) $2^{2x+5} - 3 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$ h) $3^{5x+1} + 3^x + 1 = 0$

Aufgabe 11: Fassen Sie erst geschickt zusammen, und lösen Sie dann.

a) $3^{2x+1} - 5^{x+1} = 3^{2x} + 5^x$ b) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

Aufgabe 12: Die Intensität weicher Röntgenstrahlung nimmt beim Durchdringen von Aluminiumplatten von 1 mm Stärke um 75% ab. Wie viele 1 mm starke Platten werden benötigt, um nur noch 1% der Strahlung durchzulassen?

Aufgabe 13: Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 5 % verdoppelt?

Aufgabe 14: Stellen Sie die Wachstumsfunktion $n(t) = n_0 \cdot w^t$ dar in der Form $n(t) = n_0 e^{t/\tau}$.

Aufgabe 15: Karl startet mit einem Guthaben von 400 € bei einem Zinssatz von 3% pro Jahr. Petra startet gleichzeitig mit einem Guthaben von nur 300 €, jedoch mit 5% Zinsen pro Jahr. Wann haben die Guthaben von Petra und Karl einen Gleichstand erreicht?

Aufgabe 16: Karl startet mit einem Guthaben von 400 € bei einem Zinssatz von 3% pro Jahr. Petra startet fünf Jahre später ebenfalls mit einem Guthaben von 400 €, jedoch mit 5% Zinsen pro Jahr. Wann haben die Guthaben von Petra und Karl einen Gleichstand erreicht?

Aufgabe 17: Wann holt ein exponentielles Wachstum ($n(t) = n_1 e^{\alpha t}$) ein lineares Wachstum ($n(t) = n_2 + \beta t$) ein? Es sei dabei $n_1 < n_2$.