Extremwertaufgaben

Zahlenrätsel

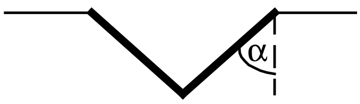
Aufgabe 1: Die Zahl 100 soll derart in zwei Summanden zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate der beiden Summanden möglichst klein wird.

Aufgabe 2: Die Zahl 60 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, dass das Produkt dieser Summanden möglichst groß wird.

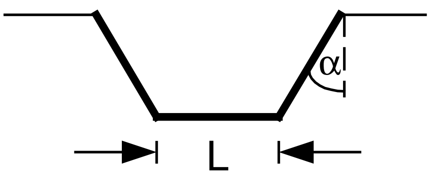
Aufgabe 3: Wie muss man die Zahl 100 in zwei positive Faktoren zerlegen, damit die Summe der Faktoren bzw. die Summe der Quadrate der Faktoren ein Minimum wird?

Ebene Geometrie

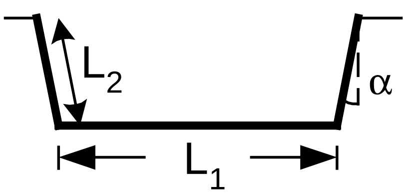
Aufgabe 4: Eine rechteckige Fläche, die an einer Seite durch eine Mauer abgegrenzt ist, soll an den anderen drei Seiten so mit einem 40 m langen Zaun umgeben werden, dass ihr Flächeninhalt möglichst groß wird.



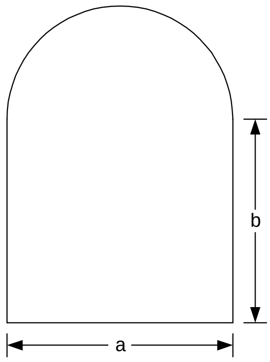
Aufgabe 5: Für eine Bewässerungsanlage soll ein oben offener Kanal mit dreieckigem Querschnitt aus zwei gleich breiten Betonfertigplatten der Breite L gebaut werden. Die Platten sind so anzuordnen, dass möglichst viel Wasser transportiert werden kann. Wie groß ist der günstigste Neigungswinkel?



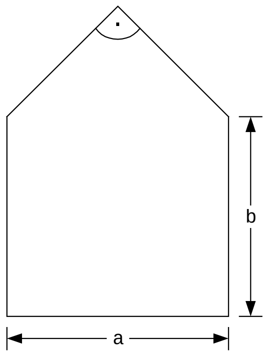
Aufgabe 6: Für eine Bewässerungsanlage soll ein oben offener Kanal mit trapezförmigem Querschnitt aus drei gleich breiten Betonfertigplatten der Breite L gebaut werden. Die Platten sind so anzuordnen, dass möglichst viel Wasser transportiert werden kann. Wie groß ist der günstigste Neigungswinkel?



Aufgabe 7: Für eine Bewässerungsanlage soll ein oben offener Kanal mit trapezförmigem Querschnitt aus einer Bodenplatte der Breite L_1 und zwei Böschungsplatten der Breite L_2 gebaut werden. Die Platten sind so anzuordnen, dass möglichst viel Wasser transportiert werden kann. Wie groß ist der günstigste Neigungswinkel?



Aufgabe 8: Ein Abwasserkanal soll gemäß neben stehender Abbildung das Profil eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben. a) Wie sind a und b zu wählen, damit bei gegebener Querschnittsfläche A der Umfang U des Profils minimal wird? b) Wie sind a und b zu wählen, damit bei gegebenem Umfang U des Profils die Querschnittsfläche A maximal wird?



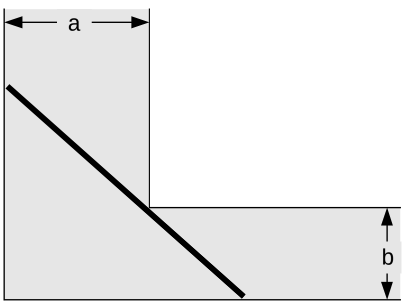
Aufgabe 9: Ein Abwasserkanal soll gemäß neben stehender Abbildung das Profil eines Rechtecks mit aufgesetztem Dreieck (gleichschenklig rechtwinklig) haben. a) Wie sind a und b zu wählen, damit bei gegebener Querschnittsfläche A der Umfang U des Profils minimal wird? b) Wie sind a und b zu wählen, damit bei gegebenem Umfang U des Profils die Querschnittsfläche A maximal wird?

Aufgabe 10: Wie groß muss man den Winkel α eines Dreiecks machen, das die Seiten a=10 cm und b=6 cm als Schenkel hat, wenn der Flächeninhalt möglichst groß werden soll?

Aufgabe 11: Wie groß müssen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit konstantem Umfang gewählt werden, damit die Hypotenuse möglichst klein wird?

Aufgabe 12: Welcher Punkt des Graphen von $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ liegt dem Koordinatenursprung am nächsten?

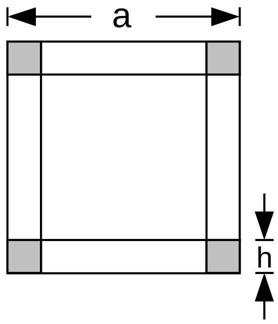
Aufgabe 13: Einer Ellipse ist ein gleichschenkliges Dreieck mit möglichst großem Flächeninhalt einzubeschreiben. Wie sind die Maße zu wählen, wenn die Dreiecksspitze im Scheitel der Ellipse liegen soll?



Aufgabe 14: Welche Länge L darf eine Holzplatte höchstens haben, damit Sie in einem Korridor (siehe Abbildung) „um die Ecke“ transportiert werden kann.

Nehmen Sie dabei an, dass die Höhe der Platte nur geringfügig kleiner als die Höhe des Korridors ist.

Räumliche Geometrie



Aufgabe 15: Aus einem quadratischen Blech (Kantenlänge a) soll ein oben offener, quaderförmiger Behälter mit möglichst großem Volumen hergestellt werden. Welche Abmessungen hat der Behälter? Wie groß ist das Maximalvolumen?

Aufgabe 16: Aus Blechtafeln 500 mm × 800 mm sollen durch Ausschneiden, Biegen und Schweißen nach Skizze oben offene, quaderförmige Behälter mit möglichst großem Volumen hergestellt werden. Es sind Maße und Volumen des Quaders zu berechnen.

Aufgabe 17: Wie muss sich bei einer geschlossenen zylindrischen Konservendose die Höhe zum Durchmesser verhalten, damit bei gegebenem Volumen möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Aufgabe 18: Wie muss sich bei einer oben offenen zylindrischen Konservendose die Höhe zum Durchmesser verhalten, damit bei gegebenem Volumen möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Aufgabe 19: Wie muss sich bei einem beiderseits offenen Zylinder die Höhe zum Durchmesser verhalten, damit bei gegebenem Volumen möglichst wenig Blech verbraucht wird?

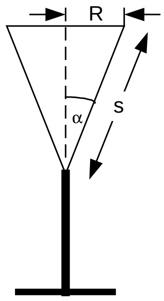
Aufgabe 20: In die kegelförmige Spitze eines Turmes (gerader Kreiskegel) soll ein zylindrischer Wasserbehälter mit möglichst großem Volumen eingebaut werden. Wie müssen die Maße des Behälters bei gegebenen Kegelabmessungen H und R gewählt werden? Wie viel Prozent der Turmspitze werden ausgenutzt?

Aufgabe 21: Unter einem Kegel /Radius R, Höhe H) soll ein mit der Spitze nach unten stehender Kegel mit möglichst großem Volumen untergebracht werden. Wie viel Prozent der Kegelvolumens werden ausgenutzt?

Aufgabe 22: Unter einer Halbkugel (Radius R) soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen untergebracht werden? Wie viel Prozent der Halbkugel werden ausgenutzt?

Aufgabe 23: Unter einer Halbkugel (Radius R) soll ein mit der Spitze nach unten stehender Kegel mit möglichst großem Volumen untergebracht werden. Wie viel Prozent der Halbkugel werden ausgenutzt?

Aufgabe 24: Wie muss ein kreisförmiges Blech ausgeschnitten werden, um daraus einen Kegel mit möglichst großem Volumen herstellen zu können?



Aufgabe 25: Wie muss bei einem kegelförmigen Sektglas mit vorgegebener Mantellinie s der Radius R gewählt werden, damit der Inhalt möglichst groß wird? Wie groß ist in diesem Fall der Winkel α?

Elektrotechnik

Aufgabe 26: Gegeben sei eine Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und dem Innenwiderstand R_i. Wie muss ein Lastwiderstand R_L gewählt werden, wenn die Leistungsabgabe der Quelle möglichst groß werden soll?

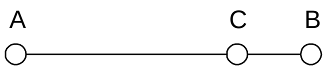
Kinetik

Aufgabe 27: Ein Leuchtturm A liegt 6 km von der Küste entfernt. Seine Entfernung vom nächsten Ort B, der direkt an der Küste liegt, beträgt 14 km Luftlinie. In welcher Entfernung vom Ort B muss man an Land gehen, wenn die Geschwindigkeit zu Wasser 5 km/h, die auf der Küstenstraße 8 km/h beträgt und der Ort B in möglichst kurzer Zeit erreicht werden soll? Nach wie viel Minuten wird der Ort erreicht?

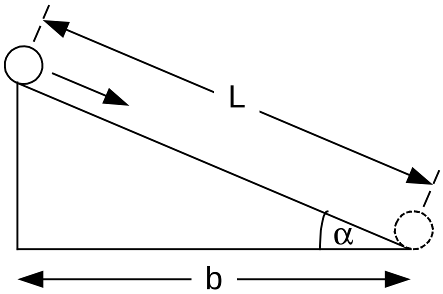
Aufgabe 28: a) Auf zwei sich unter 90° schneidenden Straßen bewegen sich die Kraftfahrzeuge A und B in Richtung auf die Kreuzung. A fährt mit 80 km/h und ist 800 m von der Kreuzung entfernt; B hat die Geschwindigkeit 60 km/h und ist 400 m von der Kreuzung entfernt. Wie viele Meter beträgt der kleinste Abstand zwischen beiden Fahrzeugen?
b) Auf zwei sich unter 90° schneidenden Straßen bewegen sich die Kraftfahrzeuge A und B in Richtung auf die Kreuzung. A fährt mit der Geschwindigkeit v_A und startet s_A von der Kreuzung entfernt; B hat die Geschwindigkeit v_B und ist s_B von der Kreuzung entfernt. Wie groß ist der kleinste Abstand zwischen beiden Fahrzeugen?

Aufgabe 29: a) Auf zwei sich unter einem Winkel $\alpha=30°$ schneidenden Straßen bewegen sich die Kraftfahrzeuge A und B in Richtung auf die Kreuzung. A fährt mit 80 km/h und ist 800 m von der Kreuzung entfernt; B hat die Geschwindigkeit 60 km/h und ist 400 m von der Kreuzung entfernt. Wie viele Meter beträgt der kleinste Abstand zwischen beiden Fahrzeugen?

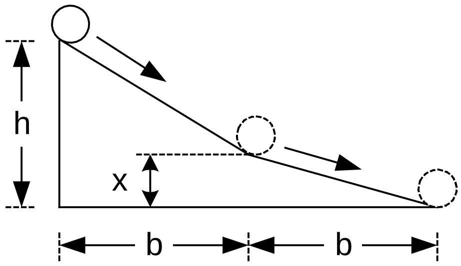
Aufgabe 30 Beim Kugelstoßen hat die Kugel eine Anfangsgeschwindigkeit v_0. Bei welchem Winkel hat die Kugel die größte Steighöhe und bei welchem Winkel wird die Wurfweite ein Maximum? Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden.



Aufgabe 31: Ein Sportflugzeug fliegt von A nach B und zurück nach C. Bei welcher Windgeschwindigkeit v_w legt das Flugzeug den Weg ABC in kürzester Zeit zurück, wenn seine Eigengeschwindigkeit $v_e = 420\ \text{km/h}$ beträgt? (Windrichtung von A nach B, Entfernung AB 1000 km, Entfernung BC 250 km)

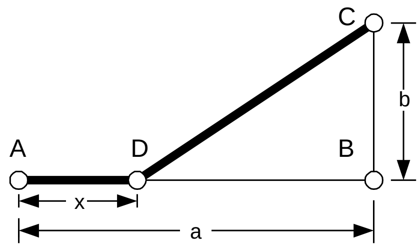


Aufgabe 32: Ein Körper der Masse m gleitet *reibungsfrei* und *ohne zu Rollen* eine schiefe Ebene hinab. Wie groß muss *bei gegebener Länge b* der Winkel α gewählt werden, damit die Strecke L in kürzester Zeit zurückgelegt wird?



Aufgabe 33: Ein Körper der Masse m gleitet *reibungsfrei* und *ohne zu Rollen* eine zweiteilige schiefe Ebene hinab. Wie groß muss *bei gegebenen Längen b, h* die Höhe x gewählt werden, damit die Gesamtstrecke in kürzester Zeit zurückgelegt wird?

Wirtschaftlichkeit



Aufgabe 34: Die Ortschaft A soll mit dem Kraftwerk C, das laut Zeichnung 2 km von der Ortschaft B entfernt ist, durch eine unter der Erde verlegte Leitung verbunden werden. Die Kosten betragen K_1 (600 DM pro lfd. Meter) bei Verlegung neben der Straße und K_2 (1000 DM pro lfd. Meter) im Gelände. In welcher Entfernung von der Ortschaft A muss die Leitung abzweigen, damit die Kosten möglichst niedrig gehalten werden. Weitere Daten: $a = 8\,\text{km}$, $b = 2\,\text{km}$.

Aufgabe 35: Von einer Hauptstraße, die von Ort A nach der Ortschaft B führt, zweigen in C, 6 km von A entfernt, zwei Straßen im Winkel von 90° ab und führen zu den Dörfern D bzw. E. Die Entfernung von der Hauptstraße beträgt 800 m bzw. 1400 m.
Vom Ort A soll zu den Dörfern D und E eine Wasserleitung unter möglichst geringem Kostenaufwand gelegt werden. In welcher Entfernung von Ort A müssen die Einzelleitungen zu den Dörfern D und E von der gemeinsamen Leitung auf der Hauptstraße abzweigen, wenn die Kosten der Hauptleitung 120 DM pro lfd. Meter , die der Zweigleitungen 80 DM pro lfd. Meter betragen?

Aufgabe 36: Eine Elektrofirma kann täglich höchstens 500 Kompaktanlagen herstellen. Die Herstellungskosten für n Kompaktanlagen belaufen sich dann nach Erfahrungswerten auf täglich ($\frac{1}{4}n^2 + 350n + 25$)€. Der Verkaufspreis je Kompaktanlage ist von der Anzahl der hergestellten Anlagen abhängig und wird von der Firma gemäß ($500 - \frac{1}{2}n$)€ kalkuliert. Bei welcher täglich hergestellten Stückzahl lässt sich der größte Gewinn erzielen?