Grundlagen der Kinetik

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die **Geschwindigkeit** ist definiert als der pro Zeiteinheit zurückgelegte Weg eines Körpers

►►► $v = \frac{s}{t}$

bzw.

►►► $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Die **Beschleunigung** ist definiert als die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit:

►►► $a = \frac{v}{t}$

bzw.

►►► $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Geradlinig gleichförmige Bewegung

Für geradlinige Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit gelten allgemein die Gleichungen:

►►► $a(t) = 0$,

►►► $v(t) = v_0 = \text{const.}$,

►►► $s(t) = v_0 \cdot t + s_0$.

Dabei ist v_0 die (Anfangs-) Geschwindigkeit, s_0 ist der (Anfangs-) Ort zum Zeitpunkt $t = 0$.

Gleichmäßig beschleunigte (geradlinige) Bewegung

Für geradlinige Bewegungen mit konstanter Beschleunigung a_0 gelten allgemein die Gleichungen:

▶▶▶ $$a(t) = a_0 = \text{const.},$$

▶▶▶ $$v(t) = a_0 \cdot t + v_0,$$

▶▶▶ $$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Diese Gleichungen müssen je nach Problem miteinander kombiniert werden.

<u>Beispiel:</u> Ein Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand heraus über eine Strecke von $100\ \text{m}$ auf die Geschwindigkeit $100\ \text{km/h}$. Wie groß ist die (konstant angenommene) Beschleunigung?

Das Problem wird beschrieben durch die beiden Gleichungen

$$v = a_0 \cdot t,$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2$$

formal haben wir dabei zwei Unbekannte, nämlich die eigentlich interessierende Beschleunigung a_0, aber auch die Zeit t, nach der der Weg s zurückgelegt wurde. Da die Zeit t hier nicht interessiert, wird sie eliminiert:

$$v = a_0 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{v}{a_0}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot \left(\frac{v}{a_0}\right)^2 = \frac{v^2}{2 \cdot a_0}$$

$$s = \frac{v^2}{2 \cdot a_0} \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{v^2}{2 \cdot s} \quad \text{bzw.} \quad a_0 = \frac{(\frac{100}{3{,}6}\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 100\ \text{m}} = \underline{\underline{3{,}858\ \text{m/s}^2}}\ .$$

Vertikale Bewegung im Schwerefeld

Speziell haben wir hier

$$a_0 = -g\,,$$

wenn der Weg von unten nach oben gezählt wird. Es ist also

▶▶▶ $$a(t) = -g = \text{const.}\,,$$

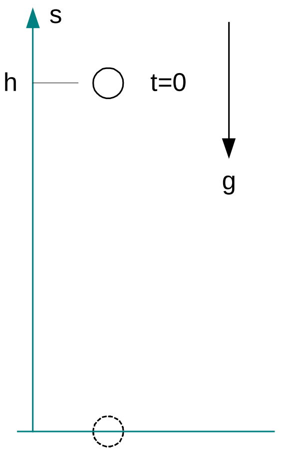
▶▶▶ $$v(t) = -g \cdot t + v_0\,,$$

▶▶▶ $$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\,.$$

Die Konstanten v_0 und s_0 werden dem jeweiligen konkreten Problem entsprechend aus den sogenannten **Anfangsbedingungen** ermittelt.

Freier Fall

Beim freien Fall ist zum Zeitpunkt $t = 0$: $v_0 = 0$ und $s_0 = h$. Damit haben wir die Gleichungen:



▶▶▶ $$v(t) = -g \cdot t\,,$$

▶▶▶ $$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h\,.$$

Der fallende Körper kommt am Boden an, wenn

$$s(t = t_{Fall}) = 0 = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{Fall}^2 + h$$

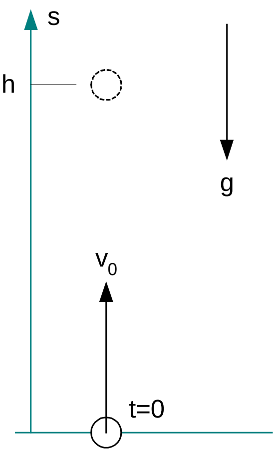
Auflösen nach der **Fallzeit** t_{Fall} liefert

▶▶▶ $$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\,.$$

Die **Auftreffgeschwindigkeit** erhält man einfach, indem man diese Fallzeit in die Geschwindigkeitsgleichung einsetzt:

▶▶▶ $$v(t_{Fall}) = -g \cdot t_{Fall} = -g \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = -\sqrt{2 \cdot g \cdot h}\,.$$

Vertikaler Wurf nach oben



Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist beim vertikalen Wurf nach oben ist $v_0 > 0$ (Anfangsgeschwindigkeit) und $s_0 = 0$ (Start am Boden). Damit haben wir die Gleichungen:

►►► $$v(t) = -g \cdot t + v_0 \,,$$

►►► $$s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \,.$$

Wenn der nach oben geworfene Körper den höchsten Punkt erreicht, ist seine Geschwindigkeit 0; daraus errechnet sich zunächst die **Steigzeit** t_{Steig}:

$$v(t = t_{Steig}) = -g \cdot t_{Steig} + v_0 = 0$$

und damit

►►► $$t_{Steig} = \frac{v_0}{g} \,.$$

Einsetzen der Steigzeit in die Gleichung für den Weg liefert die **Steighöhe** h:

$$h = s(t = t_{Steig}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{g} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} + \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \,,$$

also

►►► $$h = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \,.$$

Aus der Bedingung

$$s(t = t_{ges}) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{ges}^2 + v_0 \cdot t_{ges} = 0$$

erhält man nach Division durch t_{ges} die gesamte Flugzeit t_{ges} bis zum Wiederauftreffen auf dem Boden:

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{ges} + v_0 = 0$$

und daraus

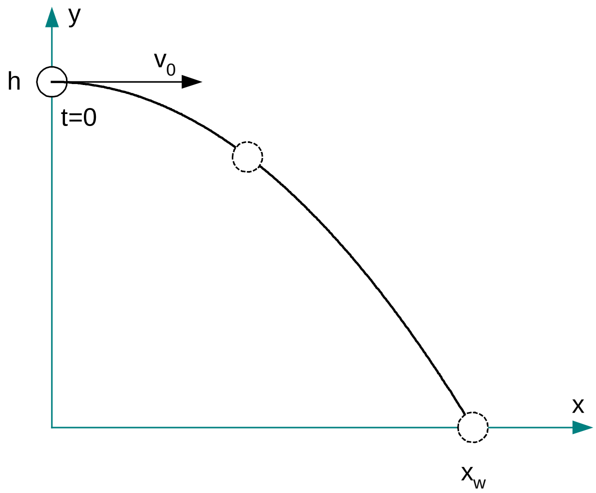
▶▶▶ $$t_{ges} = 2 \cdot \frac{v_0}{g} = 2 \cdot t_{Steig}\,.$$

Die **Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden** erhält man durch Einsetzen von t_{ges} in die Geschwindigkeitsgleichung:

$$v(t_{ges}) = -g \cdot 2 \cdot \frac{v_0}{g} + v_0 = -v_0\,.$$

Der Körper trifft also mit der (betragsmäßig) gleichen Geschwindigkeit auf, mit der er abgeworfen wurde.

Horizontaler Wurf



Beim horizontalen Wurf überlagern sich zwei Bewegungsformen:

x-Richtung: geradlinig gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit v_0.

▶▶▶ $$v_x(t) = v_0\,,$$

▶▶▶ $$x(t) = v_0 \cdot t\,.$$

y-Richtung: freier Fall aus Höhe h

▶▶▶ $$v_y(t) = -g \cdot t\,,$$

▶▶▶ $$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h\,.$$

Die **Fallzeit** t_{Fall} ist damit genauso groß wie beim freien Fall aus der Höhe h:

▶▶▶ $$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}\,.$$

Die **Wurfweite** x_w ist der in der Fallzeit zurückgelegte Weg in x-Richtung:

$$x_w = x(t = t_{Fall}) = v_0 \cdot t_{Fall} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

▶▶▶ $$x_w = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$$

Die **Auftreffgeschwindigkeit** setzt sich nun aus einem *horizontalen* Beitrag $v_x = v_0$ und einem *vertikalen* Beitrag $v_y = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ (freier Fall) zusammen. Diese Beiträge werden *vektoriell* addiert (hier einfach nach dem Satz des Pythagoras):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (\sqrt{2 \cdot g \cdot h})^2}$$

▶▶▶ $$v = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h}$$

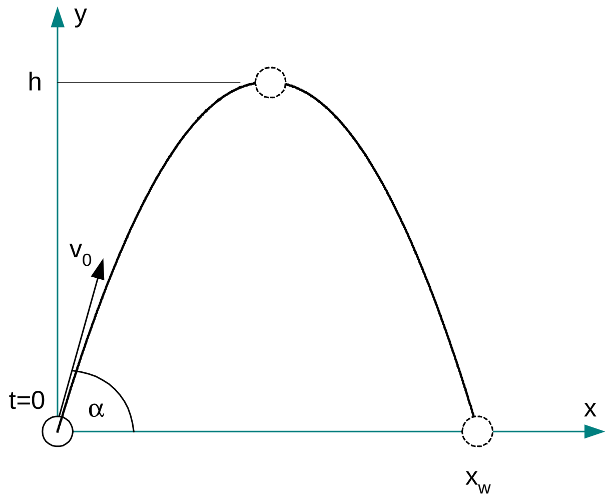
Die Gleichung der **Bahnkurve (Wurfparabel**) erhält man durch Elimination der Zeit aus den Gleichungen x(t) und y(t):

$$x(t) = v_0 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + h$$

▶▶▶ $$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2 + h$$

Schiefer Wurf



Der Wurf erfolgt mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in einem Winkel α gegen die Horizontale. Diese Anfangsgeschwindigkeit kann man sich zerlegt denken in eine *horizontale* Komponente v_{0x} und in eine *vertikale* Komponente v_{0y}:

►►► $v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$ und $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$

Dann überlagern sich beim schiefen Wurf zwei Bewegungsformen ähnlich wie beim horizontalen Wurf:

x-Richtung: geradlinig gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit v_0.

►►► $v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$,

►►► $x(t) = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$.

y-Richtung: vertikaler Wurf nach oben

►►► $v_y(t) = -g \cdot t + v_{0y} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin\alpha$,

►►► $y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t$.

Die **Steigzeit** t_{Steig} ist identisch mit der Steigzeit beim vertikalen Wurf nach oben, wobei hier nur v_0 durch $v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$ zu ersetzen ist:

►►► $t_{Steig} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$.

Entsprechendes gilt für die **Steighöhe**

▶▶▶ $$h = \frac{v_{0y}^2}{2 \cdot g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot g} .$$

und für die **gesamte Flugzeit** t_{ges} bis zum Wiederauftreffen auf dem Boden:

▶▶▶ $$t_{ges} = 2 \cdot \frac{v_{0y}}{g} = 2 \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} = 2 \cdot t_{Steig} .$$

Die **Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Boden** ist betragsgleich der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

Die Gleichung der **Bahnkurve (Wurfparabel**) erhält man wie beim horizontalen Wurf durch Elimination der Zeit aus den Gleichungen x(t) und y(t):

$$x(t) = v_{0x} \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \cdot \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha}$$

▶▶▶ $$y(x) = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x$$