Lösungsvorschlag Blatt 9 (beispielhaft für Situation b)

1

Aufstellung der Zielfunktion:

$$V(a,b) = 4a^2b$$

Fläche A: 2 blaue Flächen (je $4a^2$), 2 grüne Flächen (je ab), 1 rote Fläche ($4ab$),

$$A = 2\cdot 4a^2 + 2\cdot ab + 4ab = \underline{8a^2 + 6ab = 19{,}44}$$

Das ist die *Nebenbedingung*, mit deren Hilfe b aus $V(a,b) = 4a^2b$ eliminiert werden kann. Umstellen nach b

$$6ab = 19{,}44 - 8a^2$$

liefert

$$b = \frac{19{,}44 - 8a^2}{6a}.$$

Einsetzen und Vereinfachen liefert die *Zielfunktion* *V(a)*:

$$V(a) = 4a^2 \cdot b = 4a^{\cancel{2}} \cdot \frac{19{,}44 - 8a^2}{6\cancel{a}}$$

$$V(a) = \frac{2}{3} a \cdot (19{,}44 - 8a^2)$$

$$\underline{V(a) = 12{,}96 \cdot a - \frac{16}{3} \cdot a^3}$$

Ermittlung der Maximalstelle bzw. des „Hochpunkts“:

allgemein: $y' = f'(x) = 0$

$$V'(a) = 12{,}96 - 16 \cdot a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{12{,}96}{16} = 0{,}81$$

$$\underline{\underline{a = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9\ (m)}}$$

Verifizierung des Maximums durch Einsetzen in die 2. Ableitung:

$$V''(a) = -32 \cdot a$$

$\underline{\underline{V''(a = 0{,}9) = -32 \cdot 0{,}9 = -28{,}8 < 0}}$ und daher Maximum bzw. „Hochpunkt“

2	**<u>Seitenlänge b:</u>** Setzen Sie $a = 0{,}9\,(\text{m})$ einfach in die für b schon ermittelte Gleichung ein: $b = \frac{19{,}44 - 8a^2}{6a} = \frac{19{,}44 - 8 \cdot 0{,}9^2}{6 \cdot 0{,}9} = \underline{\underline{2{,}4\,(\text{m})}}$
3	**<u>Verhältnis a/b:</u>** $\frac{a}{b} = \frac{0{,}9}{2{,}4}$ oder $\underline{\underline{\frac{a}{b} = \frac{3}{8}}}$
4	**<u>Maximales Volumen:</u>** $V(0{,}9\text{ m}; 2{,}4\text{ m}) = 4 \cdot (0{,}9\text{ m})^2 \cdot 2{,}4\text{ m} = \underline{\underline{7{,}776\text{ m}^3}}$
Z	**<u>Zusatzfragen:</u>** **1. Wie groß sind b und V, wenn willkürlich a=0,6 m gewählt wird?** $a = 0{,}6\,(\text{m})$ $b = \frac{19{,}44 - 8a^2}{6a} = \frac{19{,}44 - 8 \cdot 0{,}6^2}{6 \cdot 0{,}6} = \underline{\underline{4{,}6\,(\text{m})}}$ $\frac{a}{b} = \frac{0{,}6}{4{,}6}$ oder $\underline{\underline{\frac{a}{b} = \frac{3}{23}}}$ $V(0{,}6\text{ m}; 4{,}6\text{ m}) = 4 \cdot (0{,}6\text{ m})^2 \cdot 4{,}6\text{ m} = \underline{\underline{6{,}624\text{ m}^3}}$ Dies könne Sie auch mit anderen Werten für a ausprobieren. Das sich ergebende Volumen sollte immer kleiner sein als $V = 7{,}776\text{ m}^3$. **2. Wie groß darf a höchstens sein?** $b = \frac{19{,}44 - 8a^2}{6a} \geq 0$ $19{,}44 - 8a^2 \geq 0$ $19{,}44 \geq 8a^2$ $\frac{19{,}44}{8} = 2{,}43 \geq a^2$ $\underline{\underline{a \leq \sqrt{2{,}43} = 9 \cdot \sqrt{3} \cong 15{,}58\,(\text{cm})}}$