Lösungsvorschlag Blatt 8

1.1

1.1 Geradengleichung y=g(x) für Straße g:

$$y = g(x) = m \cdot x + b$$

Nordöstliche Richtung bedeutet m=1, b=2 kann als Schnittpunkt mit der y-Achse direkt abgelesen werden, also:

$$\underline{y = g(x) = x + 2}$$

1.2

1.2 Berechnung der Koeffizienten von y=f(x) für Straße f:

Ansatzfunktion:

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Ableitungen:

$$y' = f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

$$y'' = f''(x) = 6a_3x + 2a_2$$

Einarbeitung der Bedingungen in Punkt A:

Graph verläuft durch A(0; 2), also

$$y = f(x=0) = 2\,,\quad \cancel{a_3 \cdot 0^3} + \cancel{a_2 \cdot 0^2} + \cancel{a_1 \cdot 0} + a_0 = 2\,,\quad \underline{a_0 = 2}$$

Kein Knick heißt: gleiche Tangentensteigung (1. Ableitung) wie g(x), also

$$y' = f'(x=0) = 1\,,\quad \cancel{3a_3 \cdot 0^2} + \cancel{2a_2 \cdot 0} + a_1 = 1\,,\quad \underline{a_1 = 1}$$

Ansatzfunktion Zwischenbilanz:

$$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + x + 2$$

$$y' = f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + 1$$

$$y'' = f''(x) = 6a_3x + 2a_2$$

Einarbeitung der Bedingungen in Punkt B:

Graph verläuft durch B(4; 1), also

$$y = f(x=4) = 1\,,\quad a_3 \cdot 4^3 + a_2 \cdot 4^2 + 4 + 2 = 1\,,\quad \underline{64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 = -5}$$

Graph geht in B von Rechts- in Linkskurve über, dort somit Wendepunkt, also

$$y'' = f''(x=4) = 0\,,\quad 6a_3 \cdot 4 + 2a_2 = 0\,,\quad \underline{24 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 = 0}$$

Lineares Gleichungssystem, Lösung idealerweise mit Additionsverfahren:

$$\underline{64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 = -5}$$

$$\underline{24 \cdot a_3 + 2 \cdot a_2 = 0} \qquad / \quad \cdot(-8)$$

$$64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 = -5$$
$$-192 \cdot a_3 - 16 \cdot a_2 = 0$$

Addition liefert nun zunächst

$-128 \cdot a_3 = -5$, also $\underline{a_3 = \frac{5}{128}}$

Einsetzen in $64 \cdot a_3 + 16 \cdot a_2 = -5$ liefert dann

$64 \cdot \frac{5}{128} + 16 \cdot a_2 = -5$ oder $\frac{5}{2} + 16 \cdot a_2 = -5$ oder $16 \cdot a_2 = -5 - \frac{5}{2} = -\frac{15}{2}$, so dass

$\underline{a_2 = -\frac{15}{32}}$

Und daher insgesamt:

$\underline{f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \frac{5}{128} \cdot x^3 - \frac{15}{32} \cdot x^2 + x + 2}$ (Übereinstimmung!)

Nun werden zur weiteren Verwendung die ersten beiden Ableitungen berechnet:

$$f'(x) = \frac{15}{128} \cdot x^2 - \frac{15}{16} \cdot x + 1$$
$$f''(x) = \frac{15}{64} \cdot x - \frac{15}{16}$$

1.3

<u>1.3 Geradengleichung y=h(x) für Straße h:</u>

$$y = h(x) = m \cdot x + b$$

„Ohne Knick“ in B bedeutet, dass m identisch sein muss mit der Tangentensteigung von f(x) in diesem Punkt, es ist also

$m = f'(x = 4) = \frac{15}{128} \cdot 4^2 - \frac{15}{16} \cdot 4 + 1 = \underline{-\frac{7}{8}}$

Zwischenbilanz für h(x) nun also:

$$y = h(x) = -\frac{7}{8} \cdot x + b$$

Der Graph von h(x) muss durch B(4; 1) verlaufen, so dass

$1 = h(x = 4) = -\frac{7}{8} \cdot 4 + b$ oder $1 = -\frac{7}{2} + b$ oder $\underline{b = \frac{9}{2}}$, also:

$\underline{y = h(x) = -\frac{7}{8} \cdot x + \frac{9}{2}}$

1.4

<u>1.4 Koordinaten der Kreuzung K:</u>

Schnittpunkt der Graphen von g(x) und h(x) durch Gleichsetzen: g(x)=h(x), also

$$x+2=-\frac{7}{8}\cdot x+\frac{9}{2} \qquad / \quad \cdot 8$$

$8\cdot x+16=-7\cdot x+36$ oder $15\cdot x=20$, so dass

$$x_K=\frac{20}{15}=\underline{\frac{4}{3}} \quad \text{und} \quad y_K=g(x=x_K=\frac{4}{3})=\frac{4}{3}+2=\underline{\frac{10}{3}}$$

Damit haben wir endlich die gesuchte Lösung!

Der Kreuzungspunkt der Straßen g und h liegt bei $\underline{\underline{K(x_K;y_K)=(\tfrac{4}{3};\tfrac{10}{3})=(1,\overline{3};3,\overline{3})}}$.

2

<u>2 Berechnung der Fläche F (additiv):</u>

Berechnung der Fläche zwischen g(x) und f(x)

$$g(x)-f(x)=x+2-(\frac{5}{128}\cdot x^3-\frac{15}{32}\cdot x^2+x+2)=x+2-\frac{5}{128}\cdot x^3+\frac{15}{32}\cdot x^2-x-2$$

$$g(x)-f(x)=-\frac{5}{128}\cdot x^3+\frac{15}{32}\cdot x^2$$

$$F_{[0;x_K]}=\int_0^{x_K}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^{x_K}\{-\frac{5}{128}\cdot x^3+\frac{15}{32}\cdot x^2\}dx=\left[-\frac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{4}x^4+\frac{15}{32}\cdot\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{x_K}$$

$$F_{[0;x_K]}=\left[-\frac{5}{512}\cdot x^4+\frac{5}{32}\cdot x^3\right]_0^{x_K=4/3}=-\frac{5}{512}\cdot(\tfrac{4}{3})^4+\frac{5}{32}\cdot(\tfrac{4}{3})^3=\underline{\frac{55}{162}\text{ FE}}$$

Berechnung der Fläche zwischen h(x) und f(x)

$$h(x)-f(x)=-\frac{7}{8}\cdot x+\frac{9}{2}-(\frac{5}{128}\cdot x^3-\frac{15}{32}\cdot x^2+x+2)$$

$$h(x)-f(x)=-\frac{5}{128}\cdot x^3+\frac{15}{32}\cdot x^2-\frac{15}{8}\cdot x+\frac{5}{2}$$

$$F_{[x_K;4]}=\int_{x_K}^{4}\{h(x)-f(x)\}dx=\int_{x_K}^{4}\{-\frac{5}{128}\cdot x^3+\frac{15}{32}\cdot x^2-\frac{15}{8}\cdot x+\frac{5}{2}\}dx$$

$$F_{[x_K;4]}=\left[-\frac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{4}x^4+\frac{15}{32}\cdot\tfrac{1}{3}x^3-\frac{15}{8}\cdot\tfrac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}\cdot x\right]_{x_K}^{4}$$

$$F_{[x_K;4]} = \left[-\frac{5}{512}\cdot x^4 + \frac{5}{32}\cdot x^3 - \frac{15}{16}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x \right]_{x_K}^{4} =$$

$$= -\frac{5}{512}\cdot 4^4 + \frac{5}{32}\cdot 4^3 - \frac{15}{16}\cdot 4^2 + \frac{5}{2}\cdot 4 - \left\{ -\frac{5}{512}\cdot(\tfrac{4}{3})^4 + \frac{5}{32}\cdot(\tfrac{4}{3})^3 - \frac{15}{16}\cdot(\tfrac{4}{3})^2 + \frac{5}{2}\cdot(\tfrac{4}{3}) \right\}$$

$$F_{[x_K;4]} = \frac{5}{2} - \frac{325}{162} = \underline{\frac{40}{81}\ \text{FE}}$$

$$F = F_{[0;x_K]} + F_{[x_K;4]} = \frac{55}{162}\ \text{FE} + \frac{40}{81}\ \text{FE} = \underline{\underline{\frac{5}{6}\ \text{FE}}}$$

Berechnung der Fläche in m²:

$$1\ \text{FE} = 1\ \text{LE}\cdot 1\ \text{LE} \leftrightarrow 100\ \text{m}\cdot 100\ \text{m} = 10.000\ \text{m}^2$$

$$F\ (\text{in m}^2) = F\ (\text{in FE})\cdot 10.000\ \text{m}^2 = \frac{5}{6}\cdot 10.000\ \text{m}^2 = \underline{\underline{8.333{,}33\ \text{m}^2}}$$

(2)

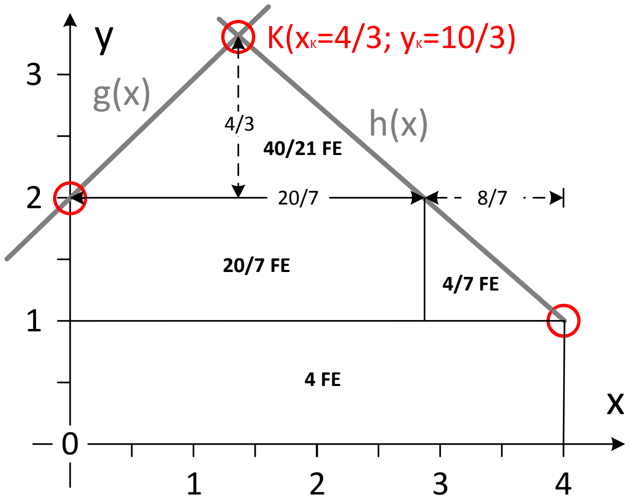
(2) Alternativer Weg: Berechnung der Fläche F (subtraktiv):

Berechnung der Fläche zwischen f(x) und x-Achse:

$$F_f = \int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \{\frac{5}{128}\cdot x^3 - \frac{15}{32}\cdot x^2 + x + 2\}dx = \left[\frac{5}{128}\cdot\tfrac{1}{4}x^4 - \frac{15}{32}\cdot\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2\cdot x \right]_0^4$$

$$F_f = \left[\frac{5}{512}\cdot x^4 - \frac{5}{32}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2\cdot x \right]_0^4 = \frac{5}{512}\cdot 4^4 - \frac{5}{32}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 = \underline{\frac{17}{2}\ \text{FE}}$$

Polygonfläche aus Teilstücken:



$$F_{\text{Polygon}} = \frac{40}{21}\ \text{FE} + \frac{20}{7}\ \text{FE} + \frac{4}{7}\ \text{FE} + 4\ \text{FE} = \underline{\frac{28}{3}\ \text{FE}}$$

$$F = F_{\text{Polygon}} - F_f = \frac{28}{3}\ \text{FE} - \frac{17}{2}\ \text{FE} = \underline{\underline{\frac{5}{6}\ \text{FE}}}$$

3	**<u>3 Koordinaten des nördlichsten Punkts der Straße f:</u>** = Berechnung der Koordinaten des Hochpunkts im betrachteten Intervall: $f'(x) = 0$ $\frac{15}{128} \cdot x^2 - \frac{15}{16} \cdot x + 1 = 0 \qquad / \quad \cdot \frac{128}{15}$ $x^2 - 8 \cdot x + \frac{128}{15} = 0$ $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - \frac{128}{15}} = 4 \pm 4 \frac{\sqrt{105}}{15} = \begin{cases} x_1 = 6{,}7325 \\ x_2 = 1{,}2675 \end{cases}$ $x_1 = 6{,}7325$ ist irrelevant. Die gesuchte x-Koordinate ist $x_{NP} = x_2 = \underline{\underline{1{,}2675}}$ (NP = Nördlichster Punkt) $y_{NP} = f(x_{NP} = 1{,}2675) = \underline{\underline{2{,}594}}$ $f''(x_{NP} = 1{,}2675) = \frac{15}{64} \cdot 1{,}2675 - \frac{15}{16} = -0{,}64 < 0$ und daher Hochpunkt Der nördlichste Punkt von f im betrachteten Streckenabschnitt hat die Koordinaten $\underline{\underline{(x_{NP}; y_{NP}) = (1{,}2675; 2{,}594)}}$