Lösungsvorschlag Blatt 7

1

Berechnung der Koeffizienten des Höhenprofils y=f(x):

Ansatzfunktion:

$$y = f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Ableitungen:

$$y' = f'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$$

$$y'' = f''(x) = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2$$

<u>Einarbeitung der Bedingungen in Punkt A:</u>

Graph verläuft durch A(0; 1), also

$$y = f(x=0) = 1, \quad \cancel{a_4 \cdot 0^4} + \cancel{a_3 \cdot 0^3} + \cancel{a_2 \cdot 0^2} + \cancel{a_1 \cdot 0} + a_0 = 1, \quad \underline{a_0 = 1}$$

Steigung (1. Ableitung) beträgt $-\frac{1}{4}$, also

$$y' = f'(x=0) = -\frac{1}{4}, \quad \cancel{4a_4 \cdot 0^3} + \cancel{3a_3 \cdot 0^2} + \cancel{2a_2 \cdot 0} + a_1 = -\frac{1}{4}, \quad \underline{a_1 = -\frac{1}{4}}$$

A(0; 1) ist Wendepunkt. Also

$$y'' = f''(x=0) = 0, \quad \cancel{12a_4 \cdot 0^2} + \cancel{6a_3 \cdot 0} + 2a_2 = 0, \quad \underline{a_2 = 0}$$

<u>Ansatzfunktion Zwischenbilanz:</u>

$$y = f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 - \frac{1}{4} \cdot x + 1, \quad y' = f'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 - \frac{1}{4}$$

<u>Einarbeitung der Bedingungen in Punkt B:</u>

Graph verläuft durch B(4; 2), also

$$y = f(x=4) = 2, \quad a_4 \cdot 4^4 + a_3 \cdot 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 2, \quad \underline{256 \cdot a_4 + 64 \cdot a_3 = 2}$$

Graph hat in B Hochpunkt, also

$$y'' = f''(x=4) = 0, \quad 4a_4 \cdot 4^3 + 3a_3 \cdot 4^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad \underline{256 \cdot a_4 + 48 \cdot a_3 = \frac{1}{4}}$$

Lineares Gleichungssystem, Lösung idealerweise mit Additionsverfahren:

$$256 \cdot a_4 + 64 \cdot a_3 = 2$$

$$256 \cdot a_4 + 48 \cdot a_3 = \frac{1}{4} \qquad / \quad \cdot(-1)$$

$$256 \cdot a_4 + 64 \cdot a_3 = 2$$

$$-256 \cdot a_4 - 48 \cdot a_3 = -\frac{1}{4}$$

	Addition liefert nun zunächst $16 \cdot a_3 = \frac{7}{4}$, also $\underline{a_3 = \frac{7}{64}}$ Einsetzen $256 \cdot a_4 + 64 \cdot \frac{7}{64} = 2$ liefert dann $256 \cdot a_4 + 7 = 2$ oder $256 \cdot a_4 = -5$, so dass $\underline{a_4 = -\frac{5}{256}}$ Und daher insgesamt: $\underline{\underline{f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = -\frac{5}{256} \cdot x^4 + \frac{7}{64} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x + 1}}$ **(q. e. d)**
2	**<u>Diverse Fragestellungen, die eine „Kurvendiskussion" betreffen:</u>** Berechnung benötigter Ableitungen: $f(x) = -\frac{5}{256} \cdot x^4 + \frac{7}{64} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x + 1$ $\underline{f'(x) = -\frac{5}{64} \cdot x^3 + \frac{21}{64} \cdot x^2 - \frac{1}{4}}$ $\underline{f''(x) = -\frac{15}{64} \cdot x^2 + \frac{21}{32} \cdot x}$ $\underline{f'''(x) = -\frac{15}{32} \cdot x + \frac{21}{32}}$
2a	**<u>Koordinaten der tiefsten Stelle des Sees:</u>** *<u>Kommentar:</u> Leider ist mir die Aufgabenstellung hier etwas „ungünstig" geraten, da die Lage des Tiefpunkts mühelos geraten werden kann. Dann entfällt die hier vorgestellte Rechnung.* *Im Grunde war es jedoch anders gedacht: <u>Ohne raten zu müssen</u>, kann man eine Lösung der Gleichung* $f'(x) = 0$ *direkt aus der Aufgabenstellung erschließen, denn es ist bekannt, dass sich an der Stelle $x = 4$ ein Hochpunkt befindet. Dann ist $\underline{x_1 = 4}$ eine Lösung der Gleichung, so dass man mit einer Polynomdivision weiterkommt bzw. weiterkäme, wenn der Tiefpunkt nicht sowieso so einfach zu erraten wäre.* $-\frac{5}{64} \cdot x^3 + \frac{21}{64} \cdot x^2 - \frac{1}{4} = 0 \qquad / \quad \cdot(-64)$ um Brüche zu vermeiden

$$5\cdot x^3-21\cdot x^2+16=0$$

Polynomdivision durch

$$(5\cdot x^3-21\cdot x^2+0\cdot x+16):(x-4)=\underline{5\cdot x^2-x-4}$$

Dann weiter mit

$$5\cdot x^2-x-4=0,\quad x^2-\frac{1}{5}\cdot x-\frac{4}{5}=0,\quad x_{2,3}=\frac{1}{10}\pm\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{10}\pm\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{80}{100}}$$

$$x_{2,3}=\frac{1}{10}\pm\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{1}{10}\pm\frac{9}{10}$$

$$\underline{\underline{x_2=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}=1}},\quad x_3=\frac{1}{10}-\frac{9}{10}=\underline{-\frac{8}{10}}\quad \text{ist irrelevant.}$$

Nachweis Tiefpunkt:

$$f''(x=1)=-\frac{15}{64}\cdot 1^2+\frac{21}{32}\cdot 1=\underline{\frac{27}{64}>0}\quad \text{und daher tatsächlich Tiefpunkt}$$

Weiter ist der dazugehörige y-Wert

$$y_1=f(x=1)=-\frac{5}{256}\cdot 1^4+\frac{7}{64}\cdot 1^3-\frac{1}{4}\cdot 1+1=\underline{\frac{215}{256}\cong 0{,}83984}$$

Die tiefste Stelle des Sees liegt also bei $\underline{\underline{(1{,}0\,|\,\frac{215}{256}\cong 0{,}83984)}}$.

Der See ist damit $\frac{41}{256}\cong 0{,}16$ bzw. $\underline{\underline{160\text{ m}}}$ tief.

2b

<u>Koordinaten der steilsten Stelle und Steigungswinkel:</u>

Steilste Stelle ist Ort maximaler Steigung, also Maximum der Steigung, damit Maximum der ersten Ableitung, also Wendepunkt:

$$f''(x)=0=-\frac{15}{64}\cdot x^2+\frac{21}{32}\cdot x$$

Ausklammern liefert

$$0=x\cdot\left(-\frac{15}{64}\cdot x+\frac{21}{32}\right)\quad \text{mit trivialer Lösung } x_1=0$$

Weiter mit

$$-\frac{15}{64}\cdot x+\frac{21}{32}=0,\quad \frac{15}{64}\cdot x=\frac{21}{32},\quad x_2=\frac{21}{32}\cdot\frac{64}{15}$$

$$\underline{x_2=\frac{14}{5}=2{,}8}$$

Nachweis Wendepunkt:

$f'''(x=2,8) = -\frac{15}{32}\cdot 2,8 + \frac{21}{32} = \underline{-\frac{21}{32} \neq 0}$, also liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor.

Weiter ist der dazugehörige y-Wert

$y_2 = f(x=2,8) = -\frac{5}{256}\cdot 2,8^4 + \frac{7}{64}\cdot 2,8^3 - \frac{1}{4}\cdot 2,8 + 1 = \underline{1,5005}$.

Die dazugehörige Steigung folgt durch Einsetzen in die 1. Ableitung:

$f'(x=2,8) = -\frac{5}{64}\cdot 2,8^3 + \frac{21}{64}\cdot 2,8^2 - \frac{1}{4} = \underline{\frac{243}{400} = 0,6075}$

Daraus folgt der Steigungswinkel gegenüber der Horizontalen:

$\alpha_{max} = \tan^{(-1)}(0,6075) \cong \underline{31,3°}$

Der Ort der größten Steigung des Geländes liegt also bei $\underline{\underline{(2,8\,|\,1,5005)}}$. Dort beträgt die Steigung $\underline{\underline{\alpha_{max} = 31,3°}}$ gegenüber der Horizontalen.

3

<u>Berechnung des Volumens des abzutragenden Erdreichs:</u>

Gleichung der Geraden zwischen A und B kann quasi abgelesen werden:

$\underline{y = g(x) = \frac{1}{4}\cdot x + 1}$

Schnittpunkt der Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ wie immer durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$f(x) = g(x)$

$-\frac{5}{256}\cdot x^4 + \frac{7}{64}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x + 1 = \frac{1}{4}\cdot x + 1$

$-\frac{5}{256}\cdot x^4 + \frac{7}{64}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x = 0 \qquad / \quad \cdot(-256)$ um Brüche zu vermeiden

$5\cdot x^4 - 28\cdot x^3 + 128\cdot x = 0$

Ausklammern liefert

$x\cdot(5\cdot x^3 - 28\cdot x^2 + 128) = 0$ mit trivialer Lösung $\underline{x_1 = 0}$ (irrelevant)

Es bleibt ein „Fall für die Polynomdivison“:

$5\cdot x^3 - 28\cdot x^2 + 128 = 0$

Da sich die Graphen auch in B schneiden, muss man nicht raten, sondern weiß, dass $\underline{x_2 = 4}$ Lösung dieser Gleichung muss. (Machen Sie die Probe durch Einsetzen!)

Dann folgt

$$(5\cdot x^3-28\cdot x^2+0\cdot x+128):(x-4)=\underline{5\cdot x^2-8\cdot x-32}$$

und weiter mit der (nun nur noch) quadratischen Gleichung

$$5\cdot x^2-8\cdot x-32=0\,,\quad x^2-\frac{8}{5}\cdot x-\frac{32}{5}=0\,,\quad x_{3,4}=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{32}{5}}=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{160}{25}}$$

$$x_{3,4}=\frac{4}{5}\pm\sqrt{\frac{176}{25}}=\frac{4}{5}\pm\frac{\sqrt{176}}{5}=\underline{\frac{4\pm\sqrt{176}}{5}}$$

$$x_3=\frac{4-\sqrt{176}}{5}\cong-1{,}8533\,,$$ irrelevant, außerhalb des interessierenden Bereichs

$$\underline{x_4=\frac{4+\sqrt{176}}{5}\cong 3{,}4533}\,,$$ x-Koordinate des interessierenden Schnittpunkts

Querschnittsfläche A des abzutragenden Bereichs:

$$A=\int_{x_4}^{4}\{f(x)-g(x)\}\cdot dx$$

$$f(x)-g(x)=-\frac{5}{256}\cdot x^4+\frac{7}{64}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x+1-(\frac{1}{4}\cdot x+1)$$

$$f(x)-g(x)=-\frac{5}{256}\cdot x^4+\frac{7}{64}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x\cancel{+1}-\frac{1}{4}\cdot x\cancel{-1}=-\frac{5}{256}\cdot x^4+\frac{7}{64}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x$$

$$A=\int_{x_4}^{4}\{f(x)-g(x)\}\cdot dx=\int_{x_4}^{4}\{-\frac{5}{256}\cdot x^4+\frac{7}{64}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x\}\cdot dx$$

$$A=\left[-\frac{5}{256}\cdot\frac{1}{5}x^5+\frac{7}{64}\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{x_4}^{4}=\left[-\frac{1}{256}\cdot x^5+\frac{7}{256}\cdot x^4-\frac{1}{4}\cdot x^2\right]_{x_4=\frac{4+\sqrt{176}}{5}}^{4}$$

$$A=-1-(-1{,}011068462)=-1+1{,}011068462=\underline{0{,}011068462\ (FE)}$$

$$1\,FE=1\,LE\cdot 1\,LE\,,\quad 1\,LE\leftrightarrow 1000\,m\ \text{ und daher }\ 1\,FE\leftrightarrow 1000\,m\cdot 1000\,m=10^6\ m^2$$

$$A\ (\text{in } m^2)=0{,}011068462\ FE\cdot 10^6\,\frac{m^2}{FE}=\underline{11068{,}5\,m^2}$$

$$\underline{\underline{V\ (\text{in } m^3)=11068{,}5\,m^2\cdot 8000\,m=88.548.000\,m^3}}$$