Lösungsvorschlag Blatt 6

1

Rekonstruktion über Produktansatz, Linearfaktoren, Vielfachheit der Nullstellen:

$$y = f(x) = k\cdot(x-2)^2\cdot(x-10)^2$$

Bestimmung von k durch Einsetzen der Koordinaten von $H(6|10)$:

$$10 = f(x=6) = k\cdot(6-2)^2\cdot(6-10)^2$$

$$10 = k\cdot(4)^2\cdot(-4)^2 = 256\cdot k$$

$$k = \frac{10}{256}$$

Funktionsgleichung in Produktform:

$$\underline{y = f(x) = \frac{10}{256}\cdot(x-2)^2\cdot(x-10)^2}$$

$$y = f(x) = \frac{10}{256}\cdot(x^2-4x+4)\cdot(x^2-20x+100)$$

$$y = f(x) = \frac{10}{256}\cdot(x^4-20x^3+100x^2-4x^3+80x^2-400x+4x^2-80x+400)$$

$$y = f(x) = \frac{10}{256}\cdot(x^4-24x^3+184x^2-480x+400)$$

$$\underline{\underline{y = f(x) = \frac{10}{256}\cdot x^4-\frac{15}{16}\cdot x^3+\frac{115}{16}\cdot x^2-\frac{75}{4}\cdot x+\frac{125}{8}}}\quad \text{(q. e. d.)}$$

2

Flächenberechnung durch Integration:

$$F = \int_2^{10} f(x)\cdot dx = \int_2^{10}\{\frac{10}{256}\cdot x^4-\frac{15}{16}\cdot x^3+\frac{115}{16}\cdot x^2-\frac{75}{4}\cdot x+\frac{125}{8}\}\cdot dx$$

$$F = \left[\frac{10}{256}\cdot\frac{1}{5}x^5-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}x^4+\frac{115}{16}\cdot\frac{1}{3}x^3-\frac{75}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2+\frac{125}{8}\cdot x\right]_2^{10}$$

$$F = \left[\frac{1}{128}\cdot x^5-\frac{15}{64}\cdot x^4+\frac{115}{48}\cdot x^3-\frac{75}{8}\cdot x^2+\frac{125}{8}\cdot x\right]_2^{10}$$

$$F = \frac{1}{128}\cdot 10^5-\frac{15}{64}\cdot 10^4+\frac{115}{48}\cdot 10^3-\frac{75}{8}\cdot 10^2+\frac{125}{8}\cdot 10$$
$$-(\frac{1}{128}\cdot 2^5-\frac{15}{64}\cdot 2^4+\frac{115}{48}\cdot 2^3-\frac{75}{8}\cdot 2^2+\frac{125}{8}\cdot 2)$$

$$\underline{\underline{F = \frac{625}{12}-(\frac{113}{12}) = \frac{128}{3}\text{ (FE)} \cong 42{,}67\text{ (FE)}}}$$

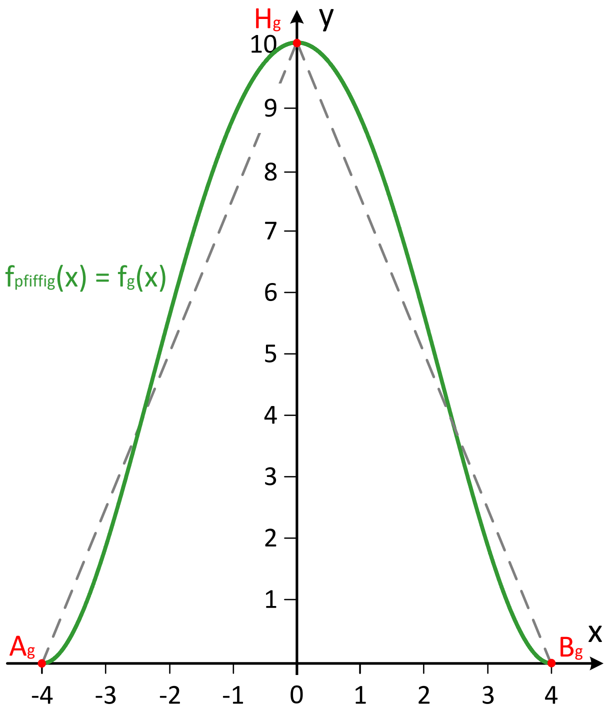
3

Näherungswert durch Berechnung der Dreiecksfläche:

$$\underline{\underline{F_{\text{genähert}} = 40\ (\text{FE})}}$$

4

Symmetrisches „Ersatzproblem“:



Wird der Graph von f(x) um 6 in negative x-Richtung verschoben, so ändert sich die Fläche zwischen Graph und x-Achse nicht, aber die Funktion $y = f_{\text{pfiffig}}(x) \equiv f_g(x)$, die diesen Graph beschreibt, ist gerade, also symmetrisch zur y-Achse, was viele Vorteile hat.

$$y = f_g(x) = k \cdot (x+4)^2 \cdot (x-4)^2$$

Bestimmung von k durch Einsetzen der Koordinaten von $H_g(0\,|\,10)$:

$$10 = f_g(x=0) = k \cdot (0+4)^2 \cdot (0-4)^2 = 256 \cdot k$$

Funktionsgleichung in Produktform:

$$\underline{y = f_g(x) = \frac{10}{256} \cdot (x+4)^2 \cdot (x-4)^2}$$

Ein entscheidender Rechenvorteil ergibt sich hier durch die geschickte Anwendung der Potenzgesetze und der binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 \cdot (a-b)^2 = [(a+b) \cdot (a-b)]^2 = [a^2 - b^2]^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

statt $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \ldots$

$$y = f_g(x) = \frac{10}{256} \cdot [(x+4) \cdot (x-4)]^2 = \frac{10}{256} \cdot [x^2 - 16]^2 = \frac{10}{256} \cdot [x^4 - 32 \cdot x^2 + 256]$$

$$\underline{\underline{y = f_g(x) = \frac{10}{256} \cdot x^4 - \frac{5}{4} \cdot x^2 + 10}} \quad (\text{q. e. d.})$$

5	<u>**Flächenberechnung durch Integration:**</u> Ein entscheidender Rechenvorteil folgt hier aus der Symmetrie der Fläche. Daher kann von 0 bis 4 integriert und die so erhaltene Fläche mit dem Faktor 2 multipliziert werden: $F=\int_{-4}^{4} f_g(x)\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{4} f_g(x)\cdot dx = 2\cdot\int_{0}^{4}\{\frac{10}{256}\cdot x^4-\frac{5}{4}\cdot x^2+10\}\cdot dx$ $F=2\cdot\left[\frac{10}{256}\cdot\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3+10\cdot x\right]_0^4$ $F=2\cdot\left[\frac{1}{128}\cdot x^5-\frac{5}{12}\cdot x^3+10\cdot x\right]_0^4$ $F=2\cdot(\frac{1}{128}\cdot 4^5-\frac{5}{12}\cdot 4^3+10\cdot 4-0)=2\cdot\frac{64}{3}=\frac{128}{3}\,(FE)\cong 42{,}67\,(FE)$