Lösungsvorschlag Blatt 4

1

Breite von Wall und Graben:

Der Wall reicht von A bis B, der Graben von B bis C, es sind also zunächst die Schnittpunkte der Funktion f(x) mit der y-Achse zu berechnen, also die

Nullstellen von f(x):

$f(x) = \frac{1}{16}\cdot x^3 - \frac{9}{16}\cdot x^2 + x = 0$ und nach Ausklammern von x:

$$x\cdot(\frac{1}{16}\cdot x^2 - \frac{9}{16}\cdot x + 1) = 0$$

mit $\underline{x_A = 0}$ und nun weiter mit

$$\frac{1}{16}\cdot x^2 - \frac{9}{16}\cdot x + 1 = 0 \quad / \quad \cdot 16$$

$$x^2 - 9\cdot x + 16 = 0,$$

so dass

$$x_{B,C} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{2})^2 - 16} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{64}{4}} = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}} = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$x_B = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} = \underline{\underline{2,43845}}$$

$$x_C = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = \underline{\underline{6,56155}}$$

Damit ist (siehe Abbildung)

$$b_W = x_B - x_A = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} - 0 = \underline{\underline{2,43845\,(m)}}$$

$$b_G = x_C - x_B = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} - (\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}) = \sqrt{17} = \underline{\underline{4,12311\,(m)}}$$

2	**Höhe des Walls und Tiefe des Grabens:** Suche nach „Hochpunkt“ und „Tiefpunkt“: $f'(x)=0$ Zunächst Berechnung der erforderlichen Ableitungen: $f(x)=\frac{1}{16}\cdot x^3-\frac{9}{16}\cdot x^2+x$ $f'(x)=\frac{3}{16}\cdot x^2-\frac{9}{8}\cdot x+1$ $f''(x)=\frac{3}{8}\cdot x-\frac{9}{8}$ Aus $f'(x)=0$ folgt $f'(x)=\frac{3}{16}\cdot x^2-\frac{9}{8}\cdot x+1=0 \quad / \quad \cdot\frac{16}{3}$ $x^2-6\cdot x+\frac{16}{3}=0$ so dass bei $x_h=3-\sqrt{\frac{11}{3}}=\underline{1{,}08515}$ mit $f''(x_h)=\frac{3}{8}\cdot 1{,}08515-\frac{9}{8}=-0{,}718<0$ ein <u>Hochpunkt</u> $x_{tv}=3+\sqrt{\frac{11}{3}}=\underline{4{,}91485}$ mit $f''(x_{tv})=\frac{3}{8}\cdot 4{,}91485-\frac{9}{8}=0{,}718>0$ ein <u>Tiefpunkt</u> Zugehörige y-Werte durch Einsetzen in f(x): $h=f(x_h)=\frac{1}{16}\cdot x_h^3-\frac{9}{16}\cdot x_h^2+x_h=\underline{\underline{0{,}50264\ (m)}}$ $t_V=f(x_{tv})=\frac{1}{16}\cdot x_{tv}^3-\frac{9}{16}\cdot x_{tv}^2+x_{tv}=\underline{\underline{-1{,}25264\ (m)}}$
3	**Zu beschaffendes Erdmaterial:** Zunächst Berechnung der Flächendifferenz durch Integration von $x_A=0$ bis $x_C=\frac{9+\sqrt{17}}{2}=6{,}56155$. Die Fläche des Walls und des Grabens müssen hier nicht separat berechnen werden, da es nur auf den Unterschied ankommt. $A=\int_{x_A=0}^{x_C}\left(\frac{1}{16}\cdot x^3-\frac{9}{16}\cdot x^2+x\right)\cdot dx=\left[\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{16}\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{x_C}$ $A=\left[\frac{1}{64}\cdot x^4-\frac{3}{16}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^{x_C}=\frac{1}{64}\cdot x_C^4-\frac{3}{16}\cdot x_C^3+\frac{1}{2}\cdot x_C^2-0=\underline{\underline{-2{,}47874\ (FE)}}$

	A ist negativ, da die Fläche des Grabens unterhalb der x-Achse größer ist als die Fläche des Walls oberhalb der x-Achse. Da 1 FE identisch ist mit 1 m² ergibt sich für das herbeizuschaffende Volumen $V = 2,47874\ m^2 \cdot 1000\ m = \underline{\underline{2478,74\ m^3}}$
4	Da diese Aufgabe eher etwas für Fortgeschrittene ist, zeihen wir hier alle Register, um uns die Berechnung einfacher zu machen. Ohne weitere Überlegungen müssten wir ein Parabelprofil g(x) konstruieren, das die x-Achse bei x_B und x_C schneidet, konkret also $y = g(x) = k \cdot (x - x_B) \cdot (x - x_C)$ mit einem Faktor k, der später so zu bestimmen ist, dass die Fläche zwischen Parabel und x-Achse „passt“. $y = g(x) = k \cdot (x - \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}) \cdot (x - \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2})$ Das sieht nicht nur „unfreundlich“ aus, es ist tatsächlich „unfreundlich“. Man kann sich doch nun aber die Parabel um $\frac{9}{2}$ nach links verschoben denken, so dass sie symmetrisch zur y-Achse wird. Auf die nachfolgende Flächenberechnung hat das keinen Einfluss. Dann wird unser Ansatz $y = g_{symm}(x) = k \cdot (x + \frac{\sqrt{17}}{2}) \cdot (x - \frac{\sqrt{17}}{2}) = k \cdot (x^2 - \frac{17}{4})$ und weiter muss nun gelten $A = -2,47874 = \int_{-\sqrt{17}/2}^{\sqrt{17}/2} k \cdot (x^2 - \frac{17}{4}) \cdot dx = 2 \cdot k \cdot \int_{0}^{\sqrt{17}/2} (x^2 - \frac{17}{4}) \cdot dx$ $-2,47874 = 2 \cdot k \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{17}{4} \cdot x\right]_0^{\sqrt{17}/2} = 2 \cdot k \cdot (-\frac{17 \cdot \sqrt{17}}{12}) = -11,68213 \cdot k$ Dabei wurde verwendet: $\int_a^b k \cdot f(x) \cdot dx = k \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx$ für beliebige Funktionen f(x) $\int_{-a}^{a} f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) \cdot dx$ für gerade (zur y-Achse symmetrische) Funktionen f(x) Und somit $k = \frac{2,47874}{11,68213} = 0,21218$

	Und dann $y = g_{symm}(x) = 0,21218 \cdot (x^2 - \frac{17}{4})$ Das Minimum (der Scheitelpunkt) liegt aus Symmetriegründen bei x=0, dort ist $t_n = g_{symm}(x = 0) = 0,21218 \cdot (0^2 - \frac{17}{4}) \cong \underline{\underline{-0,902\ (m)}}$