Lösungsvorschlag Blatt 3

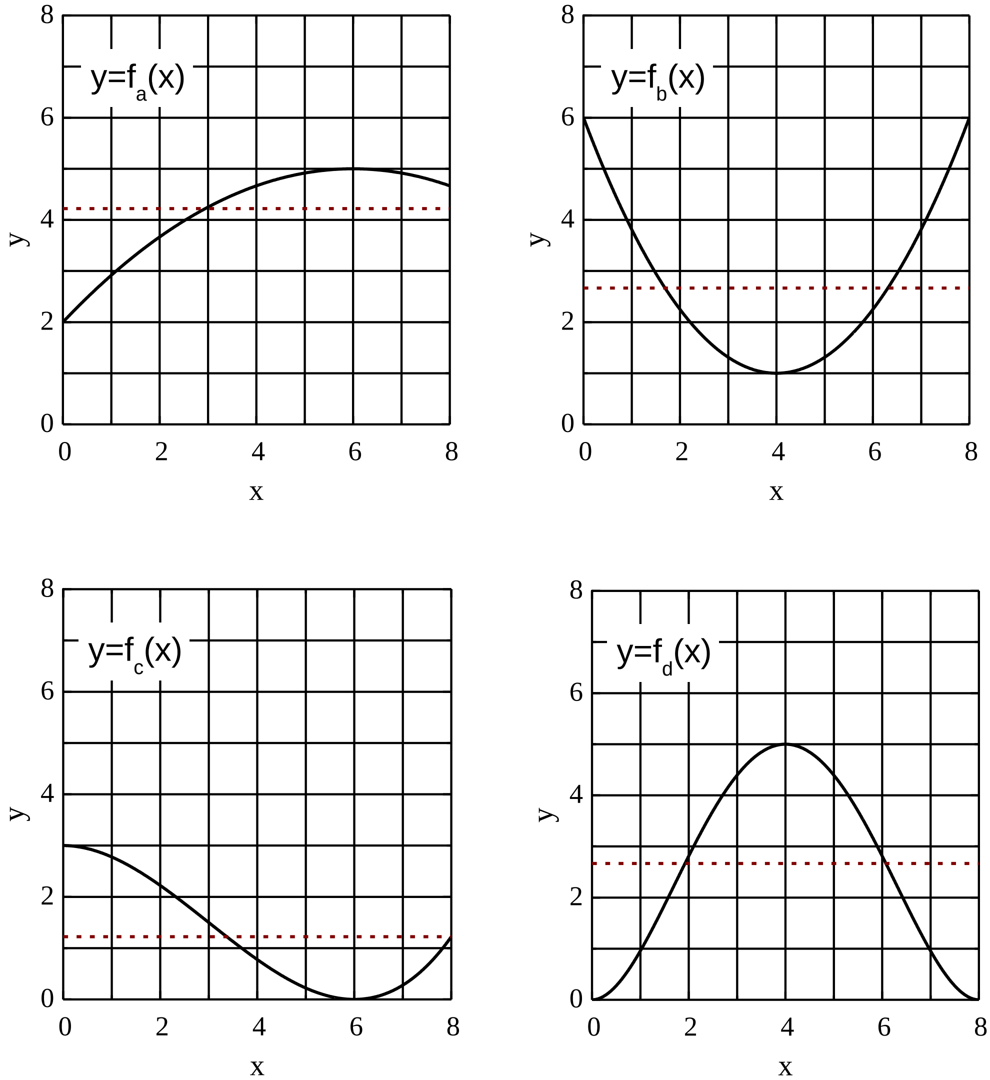
1

Eigenschaften der Funktionen:

Allgemeine Vorgehensweise bei Kurvendiskussionen! Kontrolle: Zeichnungen unten

2

Zeichnungen:



3

Füllhöhe: hier exemplarisches Vorgehen für die Funktion $f_c(x)$

Zunächst Berechnung der Fläche unter der Füllkurve:

$$A = \int_0^8 \left(\frac{1}{36}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + 3\right)\cdot dx = \left[\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + 3\cdot x\right]_0^8$$

	$A = \left[\frac{1}{144}\cdot x^4 - \frac{1}{12}\cdot x^3 + 3\cdot x\right]_0^8 = \frac{1}{144}\cdot 8^4 - \frac{1}{12}\cdot 8^3 + 3\cdot 8 - 0 = \underline{\frac{88}{9}\,(FE) \cong 9{,}78\,(FE)}$ Nach längerem Rütteln: $A = \frac{88}{9}\,(FE) = 8\,LE\cdot h$ so dass allgemein für alle Füllfunktionen $\underline{h = \frac{A}{8\,LE}}$ und speziell für $f_c(x)$: $\underline{\underline{h = \frac{\frac{88}{9}\,FE}{8\,LE} = \frac{11}{9}\,LE \cong 1{,}22\,LE}}$
4	**<u>Größte anfängliche Steigung des Oberflächenprofils:</u>** auch hier wieder exemplarisches Vorgehen für die Funktion $f_c(x)$ Als Punkte größter / kleinster Steigung werden zunächst *Wendepunkte* im sachbezogenen Definitionsbereich $0 \le x \le 8$ gesucht (vgl. auch Kurvendiskussionen unter 1.). Hier müssen aber nun auch zusätzlich noch die *Steigungen an den Rändern* des Behälters, also $y_0' = f\,'(x=0)$ und $y_8' = f\,'(x=8)$ untersucht werden. (Das wird besonders deutlich bei den parabelförmigen Füllfunktionen $f_a(x)$ und $f_b(x)$, denn Parabeln haben ja gar keinen Wendepunkt.) Ableitungen: $y = f_c(x) = \frac{1}{36}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + 3,\quad y' = f_c'(x) = \frac{1}{12}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x\,,\quad y'' = f_c''(x) = \frac{1}{6}\cdot x - \frac{1}{2}$ Wendepunkt: $f_c''(x) = 0 = \frac{1}{6}\cdot x - \frac{1}{2}$ und daher $\underline{x_W = 3}$ (hier Verzicht auf Verifizierung) Die Steigung bei $x_W = 3$ erhält man durch Einsetzen in die 1. Ableitung: $y_W' = f_c'(x = x_W = 3) = \frac{1}{12}\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = \underline{-\frac{3}{4}}$ Steigungen an den Rändern: $y_0' = f_c'(x = 0) = \frac{1}{12}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = \underline{0}$ $y_8' = f_c'(x = 8) = \frac{1}{12}\cdot 8^2 - \frac{1}{2}\cdot 8 = \underline{\frac{4}{3}}$

	Es kommt hier ganz allgemein nur auf die Beträge an; die größte Steigung haben wir am rechten Behälterrand mit $y'_8 = \frac{4}{3}$. Der (größte) Steigungswinkel gegenüber der Horizontalen beträgt dann $\underline{\underline{\alpha_{max} = \tan^{(-1)}(\frac{4}{3}) \cong 53{,}13°}}$. Zum Vergleich noch der Winkel, der bei $x_W = 3$ berechnet werden kann: $\underline{\underline{\alpha_{x_W=3} = \tan^{(-1)}(\frac{3}{4}) \cong 36{,}87°}}$