	# Lösungsvorschlag Blatt 2
1	**<u>Rekonstruktion in beiden Fällen vorzugsweise über Produktansatz, Linearfaktoren, Vielfachheit der Nullstellen:</u>** **<u>Funktion f(x):</u>** $y = f(x) = k \cdot x \cdot (x-5)$ Bestimmung von k durch Einsetzen der Koordinaten von $(4\|2)$: $2 = f(x=4) = k \cdot 4 \cdot (4-5) = -4 \cdot k$ $k = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ Funktionsgleichung in Produktform: $\underline{y = f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x \cdot (x-5)}$ $\underline{\underline{y = f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{5}{2} \cdot x}}$ (q. e. d.) **<u>Funktion g(x):</u>** $y = g(x) = k \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2$ Bestimmung von k durch Einsetzen der Koordinaten von $(4\|2)$: $2 = g(x=4) = k \cdot 4 \cdot (4+2) \cdot (4-3)^2 = 24 \cdot k$ $k = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ Funktionsgleichung in Produktform: $\underline{y = g(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2}$ $y = g(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x+2) \cdot (x^2 - 6x + 9)$ $y = g(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x^3 - 6x^2 + 9x + 2x^2 - 12x + 18)$ $y = g(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$ $\underline{\underline{y = g(x) = \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x}}$ (q. e. d.)

2

Flächenberechnungen durch Integration:

Gesamtfläche A:

$$A_{ges} = \int_0^5 f(x)\cdot dx = \int_0^5 (-\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x)\cdot dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 = \left[-\frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{5}{4}\cdot x^2\right]_0^5$$

$$A_{ges} = \left[-\frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{5}{4}\cdot x^2\right]_0^5 = -\frac{1}{6}\cdot 5^3 + \frac{5}{4}\cdot 5^2 - 0$$

$$A_{ges} = \frac{125}{12}\ (FE)$$

Teilfläche A_1:

$$A_1 = \int_0^4 (f(x) - g(x))\cdot dx$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x - (\frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x)$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x - \frac{1}{12}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x$$

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{12}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + x$$

$$A_1 = \int_0^4 (-\frac{1}{12}\cdot x^4 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + x)\cdot dx$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$A_1 = \left[-\frac{1}{60}\cdot x^5 + \frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{1}{12}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2\right]_0^4$$

$$A_1 = -\frac{1}{60}\cdot 4^5 + \frac{1}{12}\cdot 4^4 - \frac{1}{12}\cdot 4^3 + \frac{1}{2}\cdot 4^2 - 0$$

$$A_1 = \frac{104}{15}\ (FE)$$

Teilfläche A_2:

$$A_2 = \int_0^3 g(x) \cdot dx$$

$$A_2 = \int_0^3 (\frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x) \cdot dx$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^3$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{60} \cdot x^5 - \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \right]_0^3$$

$$A_2 = \frac{1}{60} \cdot 3^5 - \frac{1}{12} \cdot 3^4 - \frac{1}{12} \cdot 3^3 + \frac{3}{4} \cdot 3^2 - 0$$

$$\underline{\underline{A_2 = \frac{9}{5} \text{ (FE)}}}$$

Teilfläche A_3:

$$A_3 = \int_3^4 g(x) \cdot dx + \int_4^5 f(x) \cdot dx$$

oder $A_3 = A_{3[3;4]} + A_{3[4;5]}$ mit $A_{3[3;4]} = \int_3^4 g(x) \cdot dx$ und $A_{3[4;5]} = \int_4^5 f(x) \cdot dx$

$$A_{3[3;4]} = \int_3^4 (\frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x) \cdot dx$$

$$A_{3[3;4]} = \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_3^4$$

$$A_{3[3;4]} = \left[\frac{1}{60} \cdot x^5 - \frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{12} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \right]_3^4$$

$$A_{3[3;4]} = \frac{1}{60} \cdot 4^5 - \frac{1}{12} \cdot 4^4 - \frac{1}{12} \cdot 4^3 + \frac{3}{4} \cdot 4^2 - (\frac{1}{60} \cdot 3^5 - \frac{1}{12} \cdot 3^4 - \frac{1}{12} \cdot 3^3 + \frac{3}{4} \cdot 3^2) = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}$$

$$\underline{A_{3[3;4]} = \frac{3}{5}}$$

	$A_{3[4;5]} = \int_4^5 f(x)\cdot dx = \int_4^5 (-\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x)\cdot dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_4^5 = \left[-\frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{5}{4}\cdot x^2\right]_4^5$ $A_{3[4;5]} = \left[-\frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{5}{4}\cdot x^2\right]_4^5 = -\frac{1}{6}\cdot 5^3 + \frac{5}{4}\cdot 5^2 - (-\frac{1}{6}\cdot 4^3 + \frac{5}{4}\cdot 4^2) = \frac{125}{12} - \frac{28}{3}$ $A_{3[4;5]} = \frac{13}{12}\,(FE)$ $A_3 = A_{3[3;4]} + A_{3[4;5]} = \frac{3}{5}\,(FE) + \frac{13}{12}\,(FE) = \frac{101}{60}\,(FE)$ Mit $A_1 = \frac{104}{15}\,(FE)$, $A_2 = \frac{9}{5}\,(FE)$, $A_3 = \frac{101}{60}\,(FE)$ und $A_{ges} = \frac{125}{12}\,(FE)$ folgt nun der „Moment der Wahrheit“: $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{104}{15}\,(FE) + \frac{9}{5}\,(FE) + \frac{101}{60}\,(FE) = \frac{125}{12}\,(FE) \underset{Juhuuu...}{\overset{!!!!!}{=}} A_{ges}$ ***Ein großes Lob all denen, die hier bis zum Schluss durchgehalten haben!***
3	**Kurvendiskussion von f(x) („Kurzfassung“, nur das, was nicht offensichtlich ist):** $y = f(x) = -\frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{2}\cdot x$ $y' = f'(x) = -x + \frac{5}{2} \overset{!}{=} 0$ und daraus $x_S = \frac{5}{2}$ $y_S = f(x = x_S = \frac{5}{2}) = -\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2})^2 + \frac{5}{2}\cdot(\frac{5}{2}) = \frac{25}{8} = 3{,}125$ Parabel hat Scheitelpunkt (hier „Hochpunkt“) bei $(x_S \mid y_S) = (\frac{5}{2} \mid \frac{25}{8}) = (2{,}5 \mid 3{,}125)$
4	**Kurvendiskussion von g(x) (ebenfalls „Kurzfassung“):** $y = g(x) = \frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x$ $y' = g'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$ $y'' = g''(x) = x^2 - 2\cdot x - \frac{1}{2}$

Nicht sichtbare Nullstelle (obwohl aus Text bekannt eine gute Übung):

$$y = g(x) = 0 = \frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x = x\cdot(\frac{1}{12}\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{2})$$

Nach Ausklammern bereits sichtbare Nullstelle bei $x_1 = 0$. Es bleibt

$\frac{1}{12}\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{2} = 0$ und nach Multiplikation mit 12:

$$x^3 - 4\cdot x^2 - 3\cdot x + 18 = 0$$

Mit bekannter Nullstelle $x_2 = 3$ erfolgt Polynomdivision durch $(x-3)$:

$$(x^3 - 4\cdot x^2 - 3\cdot x + 18):(x-3) = \underline{x^2 - x - 6}$$

und aus $x^2 - x - 6 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{-2}} \\ 3 \end{cases}$$

Extrempunkte:

$y' = g'(x) = 0 = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x^2 - \frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$ und nach Multiplikation mit 6:

$$2\cdot x^3 - 6\cdot x^2 - 3\cdot x + 9 = 0$$

Mit bekannter doppelter Nullstelle $x_2 = 3$ (waagerechte Tangente) erfolgt Polynomdivision durch $(x-3)$:

$$(2\cdot x^3 - 6\cdot x^2 - 3\cdot x + 9):(x-3) = 2\cdot x^2 + 0\cdot x - 3 = \underline{2\cdot x^2 - 3}$$

und aus $2\cdot x^2 - 3 = 0$ folgt $\underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \cong \pm 1,2247}}$ (hier: Verzicht auf Nachweis)

Mit den dazugehörigen y-Werten

$$\underline{\underline{y_1 = g(x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}) \overset{\text{mit TR}}{=} -\frac{3+8\sqrt{6}}{16} \cong -1,4122}},$$

$$\underline{\underline{y_2 = g(x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}) \overset{\text{mit TR}}{=} \frac{-3+8\sqrt{6}}{16} \cong 1,0372}}$$

haben wir einen nicht sichtbaren Tiefpunkt bei $\underline{\underline{(x_1 \mid y_1) = (-1,2247 \mid -1,4122)}}$

und einen Hochpunkt bei $\underline{\underline{(x_2 \mid y_2) = (1,2247 \mid 1,0372)}}$.

Wendepunkte:

$$y'' = g''(x) = 0 = x^2 - 2 \cdot x - \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \begin{cases} -0{,}2247 \\ 2{,}2247 \end{cases}}}$$

Mit den dazugehörigen y-Werten

$$\underline{\underline{y_1 = g(x_1 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}) \overset{\text{mit TR}}{\cong} -0{,}3457}} \ ,$$

$$\underline{\underline{y_2 = g(x_2 = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}) \overset{\text{mit TR}}{\cong} 0{,}4707}}$$

haben wir Wendepunkte (hier wieder ohne Nachweis) bei

$\underline{\underline{(x_1 \,|\, y_1) = (-0{,}2247 \,|\, -0{,}3457)}}$ und $\underline{\underline{(x_2 \,|\, y_2) = (2{,}2247 \,|\, 0{,}4707)}}$.

5

<u>Vertikaler Abstand: Scheitelpunkt Parabel - Graph von g(x)</u>

Parabel hat Scheitelpunkt (hier „Hochpunkt“) bei

$$\underline{\underline{(x_S \,|\, y_S) = (\frac{5}{2} \,|\, \frac{25}{8}) = (2{,}5 \,|\, 3{,}125)}}$$

$$y_{g(x)} = g(x = \frac{5}{2}) = \frac{1}{12} \cdot (\frac{5}{2})^4 - \frac{1}{3} \cdot (\frac{5}{2})^3 - \frac{1}{4} \cdot (\frac{5}{2})^2 + \frac{3}{2} \cdot (\frac{5}{2}) = \underline{\frac{15}{64}}$$

Abstand: $\underline{\underline{\Delta y = y_S - y_{g(x)} = \frac{25}{8} - \frac{15}{64} = \frac{185}{64} = 2{,}890625}}$