Lösungsvorschlag Blatt 1

1

<u>Berechnung der Koeffizienten von n=n(t):</u>

Ansatzfunktion:

$$n = n(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

Ableitung:

$$n' = n'(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$$

Einarbeitung der Bedingungen in Punkt A:

Graph verläuft durch A(0; 0), also

$$n(t=0) = 0\,,\quad \cancel{a_3 \cdot 0^3} + \cancel{a_2 \cdot 0^2} + \cancel{a_1 \cdot 0} + a_0 = 0\,,\quad \underline{a_0 = 0}$$

außerdem:

$$n'(t=0) = 0\,,\quad \cancel{3a_3 \cdot 0^2} + \cancel{2a_2 \cdot 0} + a_1 = 0\,,\quad \underline{a_1 = 0}$$

Ansatzfunktion Zwischenbilanz:

$$n = n(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2$$

$$n' = n'(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t$$

Einarbeitung der Bedingungen in Punkt B:

Graph verläuft durch B(7; 6272), also

$$n(t=7) = 6272\,,\quad a_3 \cdot 7^3 + a_2 \cdot 7^2 = 6272\,,\quad \underline{343 \cdot a_3 + 49 \cdot a_2 = 6272} \quad / \quad :7$$

außerdem:

$$n'(t=7) = 3a_3 \cdot 7^2 + 2a_2 \cdot 7 = 1008\,,\quad \underline{147 \cdot a_3 + 14 \cdot a_2 = 1008}$$

Lineares Gleichungssystem, Lösung idealerweise mit Additionsverfahren:

$$\underline{49 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 = 896} \quad / \quad \cdot(-2)$$

$$\underline{147 \cdot a_3 + 14 \cdot a_2 = 1008}$$

$$-98 \cdot a_3 - 14 \cdot a_2 = -1792$$
$$147 \cdot a_3 + 14 \cdot a_2 = 1008$$

Addition liefert nun zunächst

$$49 \cdot a_3 = -784\text{, also}\quad \underline{a_3 = -\frac{784}{49} = -16}$$

	Einsetzen beispielsweise in $49 \cdot a_3 + 7 \cdot a_2 = 896$ liefert dann $49 \cdot (-16) + 7 \cdot a_2 = 896$ oder $-784 + 7 \cdot a_2 = 896$ oder $7 \cdot a_2 = 1680$, so dass $\underline{a_2 = 240}$ Und daher insgesamt: $\underline{\underline{n(t) = -16 \cdot t^3 + 240 \cdot t^2}}$ (Übereinstimmung!) Nun werden zur weiteren Verwendung noch die ersten drei Ableitungen berechnet: $\underline{n'(t) = -48 \cdot t^2 + 480 \cdot t}$ $\underline{n''(t) = -96 \cdot t + 480}$ $\underline{n'''(t) = -96}$
2	**<u>Bedeutung der ersten Ableitung:</u>** Die Ableitung steht immer für die Änderung der abgeleiteten Funktion, für eine Funktion $y = f(x)$ ist sie quasi die Antwort auf die Frage: Wie stark ändert sich der y-Wert, wenn ich in x-Richtung „voranschreite“. Das ist also nichts anderes als die Frage nach der (Tangenten-)Steigung. <u>Im konkreten Fall:</u> <u>Wie viele Algen kommen an einem Tag hinzu? Wachstumsrate, Wachstums- oder Vermehrungsgeschwindigkeit</u>
3	**<u>Zeitpunkt des stärksten Algenwachstums …:</u>** Suche des Maximums des Wachstums (der Steigung), also Suche des Wendepunkts: $n''(t) = 0$ und daher $-96 \cdot t + 480 = 0$, also $\underline{\underline{t = \frac{480}{96} (d) = 5 (d)}}$ Verifizierung des Wendepunkts mit Hilfe der 3. Ableitung: $\underline{n'''(t = 5) = -96 \neq 0}$, daher tatsächlich ein Wendpunkt! Anzahl der Algen zu diesem Zeitpunkt? Einsetzen in die „Originalfunktion“ n(t): $n(t = 5) = -16 \cdot 5^3 + 240 \cdot 5^2 = \underline{\underline{4000}}$ Anzahl der Algen, die pro Tag dazukommen? Einsetzen in 1. Ableitung n´(t): $n'(t = 5) = -48 \cdot 5^2 + 480 \cdot 5 = \underline{\underline{1200 (1/d)}}$

4	**<u>Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Zahl der Algen einen Maximalwert erreicht hat. Wie groß ist er?</u>** Suche nach „Hochpunkt“: $n'(t) = 0$ und daher $-48 \cdot t^2 + 480 \cdot t = 0$, also nach Ausklammern von t $t \cdot (-48 \cdot t + 480) = 0$ mit trivialer Lösung $\underline{t = 0\,(d)}$ („Tiefpunkt“ hier *ohne Nachweis*) und weiter $-48 \cdot t + 480 = 0$, also $\underline{\underline{t = 10\,(d)}}$. Verifizierung des Hochpunkts mit Hilfe der 2. Ableitung: $\underline{n''(t = 10) = -96 \cdot 10 + 480 = -480 < 0}$, daher tatsächlich ein Hochpunkt! Anzahl der Algen zu diesem Zeitpunkt? Einsetzen in die „Originalfunktion“ n(t): $n(t = 10) = -16 \cdot 10^3 + 240 \cdot 10^2 = \underline{\underline{8000}}$.
5	**<u>Nach welcher Zeit wäre die Algenpopulation vollständig ausgestorben?</u>** Keine Algen mehr, das heißt n(t)=0, also Berechnung der Nullstelle(n): $-16 \cdot t^3 + 240 \cdot t^2 = 0$, und nach Ausklammern $t^2 \cdot (-16 \cdot t + 240) = 0$ mit trivialer Lösung $\underline{t = 0\,(d)}$ („Startpunkt“) Aus $-16 \cdot t + 240 = 0$ folgt $\underline{\underline{t = \frac{240}{16}\,(d) = 15\,(d)}}$.
6	*Der Biologe beobachtet jedoch, dass ab t=11 (d) eine <u>lineare Abnahme der Algenzahl</u> erfolgt. Der Übergang zwischen der ganzrationalen Funktion 3. Grades und der linearen Funktion erfolgt „glatt“, also ohne Knick an der „Anschlussstelle“ der beiden Graphen.* **<u>Berechnung der linearen Funktion:</u>** Diese lineare Funktion $n = n_{lin}(t)$ ist also die Tangente an die Funktion $n(t) = -16 \cdot t^3 + 240 \cdot t^2$ an der Stelle $t = 11$, $n(t = 11) = -16 \cdot 11^3 + 240 \cdot 11^2 = \underline{7744}$ mit der Tangentensteigung $n'(t = 11) = -48 \cdot 11^2 + 480 \cdot 11 = \underline{-528}$. Gesucht ist mit anderen Worten eine Gerade, die durch den Punkt (11; 7744) verläuft und die Steigung -528 hat. $n = n_{lin}(t) = -528 \cdot t + b$ (b: wie gewohnt) Einsetzen von (11; 7744): $7744 = -528 \cdot 11 + b$ und daher $\underline{b = 13552}$, so dass nun: $\underline{\underline{n = n_{lin}(t) = -528 \cdot t + 13552}}$

<table>
<tr><td>7</td><td>

Wie viele Algen sind dann bei t=16 (d) noch vorhanden?

Einfach in Tangentengleichung einsetzen:

$n_{lin}(t=16) = -528 \cdot 16 + 13552 = \underline{\underline{5104}}$

</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

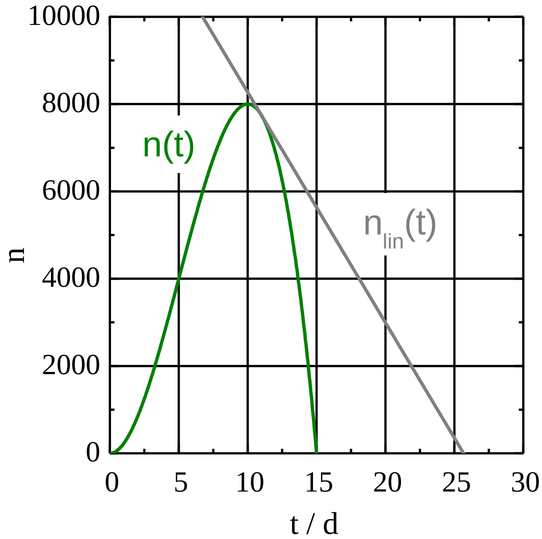
Nach welcher Zeit ist die Algenpopulation ausgestorben?

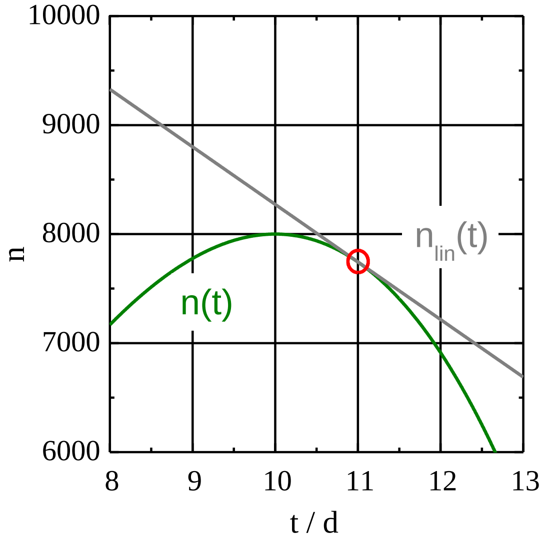
Keine Algen mehr, das heißt hier nun $n_{lin}(t) = 0$, also Berechnung der Nullstelle:

$-528 \cdot t + 13552 = 0$ und daher $\underline{\underline{t = \frac{13552}{528}\,(d) = \frac{77}{3}\,(d) \cong 25{,}67\,(d)}}$.

</td></tr>
<tr><td>Extra</td><td>

Hier abschließend noch einmal die Gesamtsituation und eine Ausschnittvergrößerung:





</td></tr>
</table>