<table>
<tr><td></td><td>

Lösungsvorschlag Blatt 11

</td></tr>
<tr><td>1</td><td>

Herleitung der Gleichung f(x):

Ansatzfunktion:

$y = f(x) = a_4 \cdot x^4 + a_0$

Graph verläuft durch (0| H):

$H = f(x=0) = \cancel{a_4 \cdot 0^4} + a_0$, so dass $a_0 = H$ und damit $y = f(x) = a_4 \cdot x^4 + H$

Graph verläuft durch (R| 0):

$0 = f(x=R) = a_4 \cdot R^4 + H$, so dass $a_4 = -\frac{H}{R^4}$ und damit $\underline{\underline{y = f(x) = -\frac{H}{R^4} \cdot x^4 + H}}$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

A(x), V(x):

siehe Unterricht, Tafelbild, Formeln für Fläche eines Rechtecks, Volumen eines Zylinders

</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

Maximale Fläche A allgemein:

$A(x) = 2 \cdot x \cdot f(x) = 2 \cdot x \cdot (-\frac{H}{R^4} \cdot x^4 + H)$

$A(x) = -\frac{2 \cdot H}{R^4} \cdot x^5 + 2 \cdot H \cdot x$

Extremstelle:

$A'(x) = -\frac{10 \cdot H}{R^4} \cdot x^4 + 2 \cdot H \overset{!}{=} 0$, also $\frac{10 \cdot H}{R^4} \cdot x^4 = 2 \cdot H$, $\quad \frac{5}{R^4} \cdot x^4 = 1$, $\quad x^4 = \frac{R^4}{5}$

und daher

$x = \sqrt[4]{\frac{R^4}{5}} = \underline{\underline{\frac{R}{\sqrt[4]{5}}}}$, $\quad y = f(x = \frac{R}{\sqrt[4]{5}}) = -\frac{H}{\cancel{R^4}} \cdot \frac{\cancel{R^4}}{5} + H = -\frac{H}{5} + H = \underline{\underline{\frac{4}{5}}} \cdot H$, $\; A_{max} = \underline{\underline{\frac{8 \cdot R \cdot H}{5 \cdot \sqrt[4]{5}}}}$

Verifizierung des Maximums durch Einsetzen in zweite Ableitung:

$A''(x) = -\frac{40 \cdot H}{R^4} \cdot x^3 < 0$ für beliebige $x > 0$, daher Maximum

Rechteck ist $2 \cdot x = \underline{\underline{\frac{2 \cdot R}{\sqrt[4]{5}}}}$ breit, $y = \underline{\underline{\frac{4}{5}}} \cdot H$ hoch, Fläche $A_{max} = 2 \cdot \frac{R}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{4}{5} \cdot H = \underline{\underline{\frac{8 \cdot R \cdot H}{5 \cdot \sqrt[4]{5}}}}$

</td></tr>
</table>

4	**<u>Maximale Fläche A:</u>** analog zu Aufgabe 3 mit Zahlenwerten, H=24 LE etc.
5	**<u>Maximales Volumen V allgemein:</u>** $V(x)=\pi\cdot x^2\cdot f(x)=\pi\cdot x^2\cdot(-\frac{H}{R^4}\cdot x^4+H)$ $V(x)=-\frac{\pi\cdot H}{R^4}\cdot x^6+\pi\cdot H\cdot x^2$ Extremstelle: $V'(x)=-\frac{6\cdot\pi\cdot H}{R^4}\cdot x^5+2\cdot\pi\cdot H\cdot x\overset{!}{=}0$, also $x\cdot(-\frac{6\cdot\pi\cdot H}{R^4}\cdot x^4+2\cdot\pi\cdot H)\overset{!}{=}0$ mit trivialer Lösung $x=0$ und $-\frac{6\cdot\cancel{\pi\cdot H}}{R^4}\cdot x^4+2\cdot\cancel{\pi\cdot H}=0$, also $-\frac{3}{R^4}\cdot x^4+1=0$, $\frac{3}{R^4}\cdot x^4=1$, $x^4=\frac{R^4}{3}$ und daher $x=\sqrt[4]{\frac{R^4}{3}}=\underline{\underline{\frac{R}{\sqrt[4]{3}}}}$, $y=f(x=\frac{R}{\sqrt[4]{3}})=-\frac{H}{\cancel{R^4}}\cdot\frac{\cancel{R^4}}{3}+H=-\frac{H}{3}+H=\underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot H}}$ $V_{max}=\pi\cdot(\frac{R}{\sqrt[4]{3}})^2\cdot\frac{2}{3}\cdot H=\underline{\underline{\frac{2\cdot\pi\cdot R^2\cdot H}{3\cdot\sqrt[2]{3}}}}$ Verifizierung des Maximums durch Einsetzen in zweite Ableitung: $V''(x)=-\frac{30\cdot\pi\cdot H}{R^4}\cdot x^4+2\cdot\pi\cdot H$ $V''(=\frac{R}{\sqrt[4]{3}})=-\frac{30\cdot\pi\cdot H}{\cancel{R^4}}\cdot\frac{\cancel{R^4}}{3}+2\cdot\pi\cdot H=-10\cdot\pi\cdot H+2\cdot\pi\cdot H=\underline{\underline{-8\cdot\pi\cdot H<0}}$ für beliebige $x>0$, daher Maximum Zylinderradius $x=\underline{\underline{\frac{R}{\sqrt[4]{3}}}}$, $y=\underline{\underline{\frac{2}{3}\cdot H}}$ hoch, Volumen $V_{max}=\underline{\underline{\frac{2\cdot\pi\cdot R^2\cdot H}{3\cdot\sqrt[2]{3}}}}$
6	**<u>Maximales Volumen V:</u>** analog zu Aufgabe 5 mit Zahlenwerten, H=20 LE etc.