Lösungsvorschlag Blatt 10 (beispielhaft für Bauelement I)

1

Aufstellung der Zielfunktion:

$$V(a,h) = 6a^2h$$

Fläche A: 2 Deck-, (Boden-)fläche (je $6a^2$), 14 Seitenflächen-Elemente (je ah)

$$A = 2 \cdot 6a^2 + 14 \cdot ah = \underline{12a^2 + 14ah = 14.400}$$

Das ist die *Nebenbedingung*, mit deren Hilfe h aus $V(a,h) = 4a^2h$ eliminiert werden kann. Umstellen nach h

$$14ah = 14.400 - 12a^2$$

liefert

$$h = \frac{14.400 - 12a^2}{14a}.$$

Einsetzen und Vereinfachen liefert die *Zielfunktion* *V(a)*:

$$V(a) = 6a^2 \cdot h = 6a^{\cancel{2}} \cdot \frac{14.400 - 12a^2}{14\cancel{a}}$$

$$V(a) = \frac{3}{7}a \cdot (14.400 - 12a^2)$$

$$\underline{V(a) = \frac{43.200}{7} \cdot a - \frac{36}{7} \cdot a^3}$$

Ermittlung der Maximalstelle bzw. des „Hochpunkts":

allgemein: $y' = f'(x) = 0$

$$V'(a) = 12{,}96 - 16 \cdot a^2 = 0 \qquad V'(a) = \frac{43.200}{7} - \frac{108}{7} \cdot a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{43.200}{108} = 400$$

$$\underline{\underline{a = \sqrt{400} = 20\ (\mathrm{cm})}}$$

Verifizierung des Maximums durch Einsetzen in die 2. Ableitung:

$$V''(a) = -\frac{216}{7} \cdot a$$

$\underline{\underline{V''(a=20) = -\frac{216}{7} \cdot 20 < 0}}$ und daher Maximum bzw. „Hochpunkt"

	Höhe h: Setzen Sie $a = 20\,(\text{cm})$ einfach in die für h schon ermittelte Gleichung ein. $h = \frac{14.400 - 12a^2}{14a} = \frac{14.400 - 12 \cdot 20^2}{14 \cdot 20} = \underline{\underline{\frac{240}{7}\,(\text{cm}) \cong 34{,}29\,(\text{cm})}}$
2	**Maximales Volumen:** $V(a = 20\text{ cm}; h = \frac{240}{7}\text{ cm}) = 6 \cdot (20\text{ cm})^2 \cdot \frac{240}{7}\text{ cm} \cong \underline{\underline{82.285{,}7\text{ cm}^3}}$
3	**Verhältnis a/h:** $\frac{a}{h} = \frac{20}{\frac{240}{7}} = \underline{\underline{\frac{7}{12}}}$
4	**Vergleich: Höhe und Volumen für halbierten Wert von a** $h = \frac{14.400 - 12a^2}{14a} = \frac{14.400 - 12 \cdot 10^2}{14 \cdot 10} = \underline{\underline{\frac{660}{7}\,(\text{cm}) \cong 94{,}29\,(\text{cm})}}$, $V(a = 10\text{ cm}; h = \frac{660}{7}\text{ cm}) = 6 \cdot (10\text{ cm})^2 \cdot \frac{660}{7}\text{ cm} \cong \underline{\underline{56.571{,}4\text{ cm}^3}}$ und auch wenn es nicht gefragt war: $\frac{a}{h} = \frac{10}{\frac{660}{7}} = \underline{\underline{\frac{7}{66}}}$